CURSO DE PROBABILIDAD -

Fichas de Ejercicios

Dra. Begoña Vitoriano

bvitoriano@mat.ucm.es

Universidad Complutense de Madrid

Octubre 2021

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (0)-Combinatoria

1. Tres clases diferentes tienen 20, 18 y 25 estudiantes, respectivamente, y cada estudiante pertenece a una sola clase. Si se forma un equipo con un estudiante de cada una de las tres clases, ¿de cuántas formas distintas se puede seleccionar un equipo?
2. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las cinco letras a, b, c, d, y e?
3. Si un hombre tiene seis camisas y cuatro pantalones distintos ¿de cuántas formas distintas puede vestirse?
4. Si se lanzan cuatro dados ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?
5. Supóngase que tres corredores del equipo A y tres del equipo B participan en una carrera. Si los seis tienen las mismas aptitudes y no hay empates,¿cuántas posiciones hay en las que los tres corredores del equipo A ocupen las tres primeras posiciones y los del equipo B las tres últimas?
6. Una urna contiene 100 bolas, de las cuales *r* son rojas. Supóngase que las bolsas son seleccionadas al azar de una en una y sin reemplazamiento ¿en cuántos casos la primera bola será roja? ¿y en cuántos será la última?
7. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 10 sillas de forma que no haya dos personas sentadas en sillas consecutivas?
8. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 10 personas en una fila de 10 sillas?
9. ¿Y si las sillas están dispuestas en círculo?
10. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 5 hombres y 5 mujeres en una mesa redonda con 10 sillas, si no puede haber dos hombres juntos?
11. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir utilizando sólo cifras impares?
12. Continuando con el problema anterior, ¿cuántos de estos números son menores de 500? ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 3?
13. ¿Cuántos números entre 100 y 999 se puede formar utilizando sólo cifras pares?
14. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto con 10 elementos? (Nota: se incluye el subconjunto vacío y el total). Generalizar la respuesta a un conjunto de *n* elementos.
15. Un conjunto *D* tiene 16 subconjuntos ¿cuántos elementos tiene *D*?
16. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con siete colores? Hacerlo primero suponiendo que no se pueden repetir colores y después pudiendo repetir los que no son contiguos.
17. Si se quiere premiar a tres chicos con un objeto distinto para cada uno, escogidos de entre ocho ¿de cuántas formas distintas puede hacerse?
18. El Senados de Estados Unidos estás constituido por dos senadores de cada uno de los 50 estados, ¿de cuántas formas distintas se puede seleccionar un comité de 8 senadores si no se pueden repetir del mismo estado?
19. Una baraja de 52 cartas contiene 4 ases. Si las cartas se barajan y a continuación se distribuyen entre cuatro jugadores de forma que a cada jugador le corresponden 13 cartas ¿en cuántos casos le tocarán a un jugador los 4 ases?
20. Llegan 5 invitados a un hotel y hay cuatro habitaciones libres ¿de cuántas formas distintas se pueden distribuir?
21. Elegimos 5 de las 10 bolas a, b, c, d, e, f, g, h, i , j, y las colocamos ordenadamente en las cajas 1, 2, 3, 4, y 5 ¿de cuántas formas distintas se puede hacer?
22. ¿Cuántos segmentos pueden trazarse tomando como extremos los vértices de un pentágono?

23. Se tienen siete puntos en un plano de modo que tres de ellos nunca están alineados ¿cuántas rectas quedan determinadas por los siete puntos?
24. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra CATARATA?
25. Se quieren comunicar entre sí cinco casas de modo que haya un camino directo entre dos cualesquiera de ellas ¿cuántos caminos habrá que construir?
26. ¿Cuál es el polígono que tiene tantas diagonales como lados?
27. Con 10 sobres y 10 cartas, todos ellos diferentes ¿cuántas formas hay de distribuir las cartas en los sobres?
28. Un test que consiste en 15 preguntas sí-no ¿cuántas posibles soluciones tiene? ¿y si cada pregunta tiene n posibles respuestas?
29. De una baraja de 40 cartas se extraen 4 cartas una a una: a) sin reemplazamiento b) con reemplazamiento. ¿Cuántas formas se pueden obtener siendo la segunda un AS? ¿y si lo son la segunda y la tercera?
30. Se tiene una urna que contiene cuatro bolas blancas, tres rojas y dos negras ¿ de cuántas formas se pueden extraer dos bolas a la vez? a) Si todas las bolas son diferentes b) si las bolas del mismo color son indistinguibles
31. ¿Cuántos números de tres cifras con capicúas? ¿y cuántos de cinco cifras?
32. ¿Cuántos números naturales se pueden formar con las cifras 1, 3, 5, 7, 9?
33. ¿De cuántas maneras 3 americanos, 4 franceses, 4 daneses y 2 italianos se pueden sentar en una fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (1)

1. Se considera el espacio muestral equiprobable formado por todos los números de tres cifras que se pueden formar con 0,1,2,3,4,5 sin permitir repeticiones. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número par?.

2. De una urna con n bolas numeradas se extrae una muestra con reemplazamiento de tamaño p. Calcular la probabilidad de que no haya repeticiones en la muestra.

3. a) Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar un dado n veces. b) Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados n veces.

4. Se lanza un dado dos veces consecutivas. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: a) no aparece ningún 3 en los lanzamientos, b) en la primera tirada el resultado es menor o igual que 2, o bien en la segunda es mayor o igual que 5.

5. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se extraen dos bolas simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos: a) las dos bolas son blancas, b) se obtiene una bola de cada color, c) al menos una bola es negra?.

6. De una urna que contiene n bolas blancas y m bolas negras, se extraen simultáneamente k bolas al azar. Calcular la probabilidad de que exactamente r bolas sean blancas.

7. Se lanzan 8 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener: a) tres caras exactamente, b) más caras que cruces, c) el mismo número de caras que de cruces?.

8. De los 30 temas de un examen un alumno sabe 18. Se proponen dos tipos de examen: a) los miembros del tribunal eligen tres temas y de ellos debe contestar dos, b) el tribunal elige cinco temas y de ellos debe contestar tres. ¿Qué tipo de examen es más favorable para el citado alumno?.

9. Se distribuyen 10 bolas en 4 cajas, de forma que cada bola tenga la misma probabilidad de caer en cualquiera de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan exactamente tres bolas en la primera caja?.

10. Se distribuyen al azar r bolas, numeradas del 1 al r, en n cajas. Hallar la probabilidad de que una caja especificada contenga k bolas.

11. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 azules y 4 blancas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 8 bolas, extraídas sin reemplazamiento: a) se obtengan 2 rojas, 2 verdes, 1 azul y 3 blancas, b) estén todas las bolas blancas, c) haya, al menos, una bola roja.

12. Hallar la probabilidad de que una mano de 13 cartas, de una baraja de 52, contenga 2, 7, 3 y 1 carta de cada palo.

13. Una persona ha comprado 40 billetes de una lotería de 1000. Si la lotería tiene tres premios a tres números diferentes, hallar la probabilidad de que gane: a) únicamente un premio, b) ningún premio, c) al menos un premio.

14. Hallar la probabilidad de que al tirar una moneda 11 veces se obtenga la sexta cara en el lanzamiento undécimo. Calcular la probabilidad de que al tirar una moneda n veces obtengamos la k–ésima cara en la n–ésima tirada.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2)

1. Considerar las sucesiones de conjuntos definidas por:

$$A_n = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n} \right\} \quad \text{y} \quad B_n = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq \frac{n}{1+n} \right\}.$$

Describir los conjuntos $\lim A_n$, $\lim A_n^c$, $\lim B_n$, $\lim B_n^c$ y $\lim(A_n \cap B_n^c)$.

2. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y sea

$$C = \left\{ (a,b] = \{ x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leq b \} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Demostrar que la σ-álgebra engendrada por C coincide con el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, P el subconjunto de los números pares, I el subconjunto de los números impares y $\wp(P)$ el conjunto de los subconjuntos de P. Sea $C = \{ A \cup \mathrm{I} \mid A \in \wp(\mathrm{P}) \}$. ¿Es C un álgebra?.

4. Demostrar que $C = \{ X \subset I\!N \mid X \text{ es finito o } I\!N - X \text{ es finito} \}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (3)

1. Sea (Ω,Δ,P) un espacio de probabilidad. Demostrar que si $A,B,C\in\Delta$, con $A\cap B\subset C$ entonces $P(C^c)\le P(A^c)+P(B^c)$.

2. Sea (Ω,Δ,P) un espacio de probabilidad. Demostrar que $\forall A,B\in\Delta$ se tiene que $P(A\cap B)\ge 1-P(A^c)-P(B^c)$. Generalizarlo a una colección numerable de sucesos.

3. Sea (Ω,Δ,P) un espacio de probabilidad y sean $A,B\in\Delta$. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) $P(A)+P(B)>1 \quad\Leftrightarrow\quad A\cap B=\varnothing.$

b) $P(A)=P(B)=p \quad\Leftrightarrow\quad P(A\cap B)=p^2$.

c) $P(A)=P(B^c) \quad\Leftrightarrow\quad A^c=B.$

d) $P(A)=0$ y $P(B)=1 \quad\Leftrightarrow\quad P(A\cap B)=0.$

4. Si A y B son dos sucesos, demostrar que:

$$P\Big((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\Big)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B).$$

5. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=\dfrac{1}{2},\ P(A\cup B)=\dfrac{3}{4},\ P(B)=\dfrac{5}{8}.$ Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: $A\cap B,\ A^c\cap B^c,\ A^c\cup B^c,\ A^c\cap B.$

6. Sea (Ω,Δ,P) un espacio de probabilidad y sean $A,B,C\in\Delta$, con $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$, $P(C)=0.3$, $P(A\cap B)=0.1$ y $(A\cup B)\cap C=\varnothing.$ Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Sólo ocurre A. b) Los tres sucesos ocurren. c) Ocurren dos y no más.
d) Ocurre al menos uno. e) No ocurre ninguno de los tres. f) No ocurren más de dos.
g) A lo más uno de los tres ocurre.

7. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=1/4$, $P(B/A)=1/2$ y $P(A/B)=1/4$. Demostrar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones: a) $A\subset B$, b) A y B independientes, c) A^C y B^C independientes, d) A y B incompatibles, e) $P(A^C/B^C)=1/2$, f) $P(A/B)+P(A/B^C)=1$

8. Sea (Ω,Δ) un espacio probabilizable y sea $\{P_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión de medidas de probabilidad definidas sobre él. Demostrar que la aplicación $P:\Delta\to I\!R$, definida por $P(A)=\sum\limits_{n\in I\!N} a_n\,P_n(A)$ con $a_n\in I\!R^+\cup\{0\}$ y $\sum\limits_{n\in I\!N} a_n=1$, es medida de probabilidad

9. Sea $\Omega=I\!N\cup\{0\}$ y $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$. Demostrar que las siguientes funciones son probabilidades:

a) $P(A)=\sum\limits_{x\in A}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, con $\lambda>0.$ b) $P(A)=\sum\limits_{x\in A}p(1-p)^x$, con $0<p<1.$

10. Sea el espacio probabilístico $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$ y sea la función: $P(A)=\sum\limits_{i\in A}\dfrac{1}{2^i}\quad\forall A\in\wp(\mathbb{N})$

a) Comprobar que P es una medida de probabilidad
b) Calcular las probabilidades del conjunto de números pares y del de los impares

11. Sabiendo que $P(A)=\dfrac{3}{4}$ y $P(B)=\dfrac{3}{8}$, probar $P(A\cup B)\ge\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{1}{8}\le P(A\cap B)\le\dfrac{3}{8}$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (4)

1. Se tiene un manojo de n llaves y se desea abrir una puerta. Suponiendo que la llave probada se quita del manojo, ¿cuál es la probabilidad de que la puerta se abra en la k-ésima prueba y no antes?. Calcular la probabilidad del mismo suceso suponiendo que la llave probada no se quita del manojo.

2. A una reunión asisten 18 personas, si se forman consecutivamente tres grupos de cinco personas, ¿cuál es la probabilidad de que en algún grupo entre una persona determinada?, ¿y de que entren tres personas determinadas, las tres en el mismo grupo?.

3. Una urna contiene 5 bolas negras y 4 blancas, otra urna contiene 4 bolas negras y 5 blancas. a) Se traslada una bola, elegida aleatoriamente, de la primera urna a la segunda y a continuación se extrae una bola de la segunda urna; ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?. b) si se trasladan dos bolas de la primera a la segunda urna, ¿cuál es la probabilidad de extraer bola blanca?.

4. Un estudiante que sabe una proporción p de las preguntas de una asignatura, se somete a un examen tipo test, en el que cada pregunta cuenta con m posibles respuestas, igualmente verosímiles cuando no conoce la respuesta. Calcular la probabilidad de que el estudiante conociese la respuesta a una pregunta que ha contestado correctamente. Según ello, qué nota debe atribuírsele en función del número de aciertos?.

5. En una urna se introducen n bolas, cada una de las cuales puede ser blanca o negra con igual probabilidad. A continuación se extraen k bolas con reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas, si las k extraídas han resultado ser todas blancas?.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (5)

1. A una persona *A* se le pasa un papel que marca con el signo +, con probabilidad 1/3, o con el signo -, con probabilidad 2/3. *A* pasa el papel a *B*, que puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a *C*, quien puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a *D*, quien puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a un árbitro. La probabilidad con que cada una de las personas *B*, *C* o *D* cambia el signo es de 2/3. Si el árbitro vio un signo + en el papel ¿cuál es la probabilidad de que *A* escribiera un signo +?

2. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) $P(B/A) = P(B/A^c) \quad \Rightarrow \quad A$ y B independientes.

b) $P(A/B) > P(A) \quad \Rightarrow \quad P(B/A) > P(B)$.

c) $P(A) = a$ y $P(B) = b > 0 \quad \Rightarrow \quad P(A/B) \geq (a+b-1)/b$.

d) $P(A) > P(B) \quad \Rightarrow \quad \forall C$ con $P(C) > 0$ es $P(A/C) > P(B/C)$.

3. Dos de las cuatro válvulas de un aparato, que funcionan independientemente, han fallado. Calcular la probabilidad de que hayan sido la 1 y la 2, si la probabilidad de que falle la válvula *i* es *i*/10.

4. Se dispone de una moneda y dos dados A y B. A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda y, si sale cara, se lanza repetidas veces el dado A, pero si sale cruz, se hace lo mismo con el dado B. a) Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento la cara observada sea roja. b) Sabiendo que en los dos primeros lanzamientos se han observado dos caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado lanzado sea el A?. c) Generalizar el apartado anterior considerando *n* lanzamientos y *n* caras rojas.

5. Se dispone de dos urnas A y B. La urna A contiene 6 bolas negras, 4 blancas y 1 roja; y la urna B contiene 8 bolas negras, 1 blanca y 2 rojas. El experimento consiste en lanzar tres dados y extraer 4 bolas sin reemplazamiento, de la urna A si en el lanzamiento de los dados se obtuvo algún número par, y de la urna B en caso contrario. Habiéndose obtenido 3 bolas negras y 1 blanca, calcular la probabilidad de haber obtenido algún número par.

6. Un punto M se mueve en el plano, partiendo del origen, por saltos de unidades enteras. Cuando está en la posición (m,n) pasa a la posición (m+1,n) con probabilidad *p* y a la posición (m,n+1) con probabilidad 1-*p*. Determinar la probabilidad de que M pase por la posición (a,b).

7. Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras. Se pasan 4 bolas a una segunda urna. De la segunda urna se extraen dos bolas una a una sin reemplazamiento. Si la primera bola extraída es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca?.

8. Obtener la probabilidad de que, en un grupo de diez personas, al menos dos celebren su cumpleaños el mismo día del año. Supóngase que la probabilidad de nacimiento de cada día del año es la misma y que los años considerados no son bisiestos. ¿Con cuántas personas es esa probabilidad superior a ½?

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (6)

1. Dada la función de distribución, $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ (1+x)/10 & \text{si} \quad 1\le x<(3/2) \\ (2x-1)/6 & \text{si} \quad (3/2)\le x<(5/2) \\ 1 & \text{si} \quad x\ge (5/2) \end{cases}$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

$\left(1,\frac{3}{2}\right],\ \left[1,\frac{3}{2}\right],\ \left(1,\frac{3}{2}\right),\ \left[1,\frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},2\right],\ \left[\frac{1}{2},2\right],\ \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\ \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\mathbb{Q},\mathrm{I\!I}$

2. Determinar el valor de k para que las siguientes funciones sean de densidad:

a) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \ x\le 0 \\ kxe^{-x/2} & \text{si} \ x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{5k}{5+x^2} \quad \forall x\in \mathbb{R},\quad k\ge 0$

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \ x\le 0 \\ kx^2e^{-x/2} & \text{si} \ x>0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \ 0<x<\sqrt{2}/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

3. Sea la función de densidad $f(x)=\begin{cases} |1-x| & \text{si} \ 0<x<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Determinar la función de distribución asociada y la probabilidad de los siguientes sucesos: $[0,1]$, $[-2,2]$, $(1/2,+\infty)$ y $\{0,1/2,1\}$.

4. Sea $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \ x<0 \\ 1-k(1-x) & \text{si} \ 0\le x<k \\ 1 & \text{si} \ x\ge k \end{cases}$

Determinar k para que F sea función de distribución. Clasificar F según los valores de k.

5. Sea $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<(1/3) \\ x^{2\alpha-1} & \text{si} \quad (1/3)\le x<\alpha \\ 1 & \text{si} \ x\ge \alpha \end{cases}$

Determinar los valores de α para que F sea función de distribución. ¿Para qué valores de α F es discreta?. ¿ Para qué valores de α es F absolutamente continua?.

6. Dada la función de distribución $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3x/40 & 0\le x<1 \\ ([x]/24)+(3x/40) & 1\le x<6 \\ (1/4)+(3x/40) & 6\le x<10 \\ 1 & x\ge 10 \end{cases}$

Encontrar la parte discreta y la parte continua, y calcular la probabilidad del intervalo (3,8)

7. De una urna que contiene tres bolas blancas, dos negras y una verde, se extraen tres bolas al azar y se considera la variable aleatoria X≡"número de bolas blancas obtenidas". Determinar la probabilidad inducida por X.

8. Sea $\Omega = Z^+$, $\mathrm{A} = P(\Omega)$ y $P(\omega) = 2^{-\omega}$. Se define $X(\omega)$=resto de ω (módulo k). Calcular $P(X=r)$ para $r=0,1,\ldots,k-1$.

9. Una urna contiene N bolas numeradas. Se extraen n bolas al azar con reemplazamiento y se consideran las variables aleatorias X≡"menor de los números obtenidos" y Y≡"mayor de los números obtenidos". Obtener las correspondientes funciones de distribución y, a partir de ellas, las funciones de probabilidad.

10. Dada X v.a. con función de densidad $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$ obtener la distribución de la variable $Y = 2X + 5$ y $Z = X^2$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (7)

1. Sea X una v. a. con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \alpha x & \text{si} \quad 0\le x<\alpha\\ 1 & \text{si} \quad x\ge\alpha\end{cases}$$

donde $\alpha\in[0,1]$.

a) Determinar los valores de α para los que F es discreta y los valores para los que F es continua.

b) Calcular $\mathrm{E}_\alpha[X]$, $\mathrm{E}_\alpha\left[e^X\right]$ y $P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}$.

2. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}kx+\frac{1}{2} & \text{si} \quad -1\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) Determinar los valores de k para los que f es función de densidad.

b) Hallar la media, la varianza y la mediana de X.

3. Sea X variable aleatoria con función de distribución F

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-1\\ \dfrac{(x+2)^2}{32} & \text{si} \quad -1\le x<2\\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Calcular su esperanza y su varianza.

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_\alpha(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-\alpha\\ (\alpha/2)x+(\alpha^2/2) & \text{si} \quad -\alpha\le x<\alpha\\ 1 & \text{si} \quad x\ge\alpha\end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de α es F función de distribución?.

b) ¿Para cuáles de dichos valores de α es F absolutamente continua?, ¿para cuáles es discreta?.

c) Calcular $\mathrm{E}_\alpha[X]$ y $P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}$

5. Sea X una v. a. que toma valores enteros positivos con probabilidad

$$P(X=k)=c(1-\lambda)^k, \quad k=1,2,\dots \quad (0<\lambda<1)$$

Determinar el valor de la constante c, la esperanza de X y su varianza.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (8)

1. Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes v.a.:
a) X con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ [x]\dfrac{x}{8} & \text{si} \quad 1\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

b) X con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{[x]}{3} & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Sea $Y:(R,B,P)\to(R,B)$ tal que $Y(x)=x^2$. Calcular la media de Y, estando dada la función de distribución asociada a P por

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2/4 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ (1/2)+(1/4)(x-1)^2 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

3. La demanda X de un cierto producto, por unidad de tiempo, se distribuye con función de densidad $f(x)=e^{-x}$ si $x\ge 0$ y cero en otro caso. El aprovisionamiento del producto para satisfacer la demanda se hace al principio de cada unidad de tiempo considerada. La venta de una cantidad "x" produce una ganancia "ax", y el sobrante "y", que hay al principio de cada unidad de tiempo, procedente de la anterior, no es utilizable por lo que produce una pérdida "by". Hállese la cantidad conveniente de aprovisionamiento por unidad de tiempo, para que la ganancia esperada sea máxima.

4. Sea

$$\varphi(t)=\frac{1}{2-e^{it}}$$

a) Comprobar que φ es la función característica de una v.a. discreta, X, y hallar la media y la varianza de X.
b) Hallar la función característica de $Y=1+2X$, así como su media y su varianza.

5. Estudiar si las siguientes funciones son funciones características de alguna v.a.
a) $\varphi(t)=(1-t^2)\lambda,\ \ \lambda\neq 0$
b) $\varphi(t)=e^{\lambda^2(e^{it}-1)},\ \ \lambda\neq 0$

6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Determinar su función característica, así como los 3 primeros momentos respecto al origen

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (9)

1. En una especie animal, la probabilidad de que un hijo tenga sangre defectuosa es 0,6. El número de hijos en cada familia sigue una distribución de Poisson de parámetro λ=4. Calcular: a) La probabilidad de que una familia no tenga hijos sanos. b) El número esperado de hijos sanos.

2. Una fábrica de plásticos produce accesorios para automóvil. Por estudios realizados en el proceso de fabricación se sabe que el porcentaje de unidades defectuosas producidas es del 4%. Las piezas son enviadas a un cliente en lotes de 100 piezas; éste inspecciona el lote y lo acepta si contiene menos de 6 piezas defectuosas. ¿Qué porcentaje de lotes rechazados debe esperar el fabricante, si el proceso de fabricación no ha sufrido modificaciones?.

3. El número de llamadas por minuto que recibe una centralita tiene distribución de Poisson, siendo el promedio de llamadas por hora de trescientas. Se pide:
a) Probabilidad de que quede rebasada en un minuto dado, si no puede establecer más de doce conexiones por minuto.
b) Probabilidad de que reciba una sola llamada en un minuto dado.

4. El número de vehículos que pasa por determinado punto en cierta carretera local poco transitada, en un determinado período de tiempo, sigue una distribución de Poisson de parámetro λ=6. Se conoce que la probabilidad de que un coche sobrepase el límite legal de velocidad al pasar por ese punto es 1/3. Determinar la probabilidad de que hubiesen pasado exactamente *k* vehículos por dicho punto, si se observaron *j* infracciones.

5. Sea $X \equiv U[0,1]$. Determinar un valor "*a*" tal que, tomando al azar cuatro valores de *X*, la probabilidad de que al menos uno de los cuatro supere el valor "*a*", sea al menos 0.99

6. Las puntuaciones obtenidas mediante un test de aptitud se distribuyen según una $N(\mu=500,\ \sigma=100)$. ¿Qué tanto por ciento de alumnos alcanzarán puntuaciones que: a) excedan de 700 puntos; b) sean menores de 400; c) estén comprendidas entre 400 y 600; d) difieran en valor absoluto de 500 en más de 150?.

7. Sea *X* una v. a. con distribución normal verificando que $P\{X \le 15\} = 0.1$ y $P\{X \le 20\} = 0.95$. Se pide: a) $P\{X \le 13\}$, b) $P\{16 \le X \le 17\}$, c) x tal que $P\{X \le x\} = 0.05$, d) x tal que $P\{X > x\} = 0.5$.

8. Una compañía de seguros pretende crear pólizas de seguros individuales contra un cierto tipo de accidentes. Una encuesta previa ha permitido estimar que, en un año, cada persona tiene una probabilidad de 1/5000 de ser víctima de un accidente cubierto por este tipo de póliza. Si la compañía vendiese diez mil pólizas de seguros de este tipo por año, determinar la probabilidad de que el número de accidentes no superase los tres por año (cifra por encima de la cual la operación no está considerada como rentable).

9. El tiempo de vida (medido en meses) de un cierto tipo de bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro λ=1/12. Un vendedor que gana en cada bombilla 1euro se compromete a lo siguiente: a) si la bombilla se funde antes del cuarto mes, devuelve al comprador 0'60 euros.; b) si se funde en un instante *x* entre el cuarto y el sexto mes, devuelve al comprador (1'80−0'30*x*) euros¸ c) no devuelve ninguna cantidad si se estropea después del sexto mes. Se pide: *i)* Distribución de la ganancia obtenida por bombilla. *ii*) Ganancia media por bombilla. *iii*) Si vende 10 bombillas a un cliente, determinar la distribución del número que serán devueltas antes del primer mes.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (11)

1. Se extraen al azar dos bolas, con reemplazamiento, de una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 bolas rojas. Se consideran las variables aleatorias discretas:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si la primera bola es blanca} \\ 1 & \text{si la primera bola es roja} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & \text{si la segunda bola es blanca} \\ 1 & \text{si la segunda bola es roja} \end{cases}$$

a) Determinar la distribución de probabilidad de (X,Y) y su función de distribución.
b) Distribuciones marginales y condicionadas.

2. Sea (X,Y) v.a. con distribución uniforme en el recinto limitado por $y = x/3$, $x = 3$, $y = 0$
a) Determinar la función de densidad
b) Determinar las funciones de densidad marginales y condicionadas.

3. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad 0<x<1 \ \wedge \ 0<y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar la función de distribución conjunta, las funciones de densidad marginales y condicionadas.

4. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24y(1-x-y) & \text{si} \quad x>0 \ \wedge \ y>0 \ \wedge \ x+y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar las funciones de densidad marginales y condicionadas.

5. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si} \quad x>0 \ \wedge \ y>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar las funciones de densidad marginales y condicionadas.

6. La v.a. ξ tiene distribución exponencial con $\lambda=1$ y $\eta/\xi=x$ tiene función de densidad

$$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^{x+1}} & \text{si} \quad y>1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la función de densidad de (ξ,η).
b) Hallar la función de densidad marginal de η.
c) Hallar la función de densidad condicionada de $\xi/\eta=y$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (12)

1. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en $[0,1]\times[0,1]$. Determinar la función de densidad de (Z,T) siendo $Z = X^2$ y $T = X^2 + Y^2$.

2. Sea (X,Y) variable aleatoria discreta tal que:

$$P(X = i, Y = j) = \frac{4ij}{m(m+1)n(n+1)} \qquad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$$

¿Son X e Y independientes?.

3. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos x \cos y & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \ \wedge \ 0 < y < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Son X e Y independientes?.

4. Se eligen dos puntos, aleatoria e independientemente, sobre un segmento de longitud 1. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de los tres segmentos formados tenga longitud superior a 1/4 ?.

5. Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, ambas con distribución exponencial de parámetro λ=1. Hallar la distribución de Z=$|X-Y|$.

6. Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, ambas con distribución exponencial de parámetro λ=1. ¿Son independientes las variables aleatorias $Z = X + Y$ y $W = X/(X+Y)$?

7. Sean X e Y variables aleatorias independientes, tales que X se distribuye uniformemente en (1,3) e Y tiene función de densidad

$$f_2(y) = \begin{cases} e^2 e^{-y} & \text{si} \quad y > 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (Z,W), siendo Z=X/Y, W=XY.

8. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda e^{-y} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de λ.
b) ¿Son X e Y independientes?.
c) ¿Son X y W=$Y-X$ independientes?.
d) Hallar la media de las variables aleatorias: $X+Y$, X + W, XY, XW.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (13)

1. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} k^2\, e^{-ky} & \text{si} \quad 0<x<y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la probabilidad de $[0,1]\times[0,1]$.
b) Estudiar si X e $Y-X$ son independientes.
c) Hallar la línea general de regresión y la recta de regresión de Y sobre X.

2. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \quad \wedge \quad x\le y\le x+2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de k.
b) Obtener las líneas generales de regresión.

3. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{8}(x^2-y^2)e^{-x} & \text{si} \quad x>0 \quad \wedge \quad -x\le y\le x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar las curvas generales de regresión.

4. Sea (X,Y) variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}xe^{-x} & \text{si} \quad x>0 \quad \wedge \quad \dfrac{x}{2}<y<2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar la curva general de regresión de Y sobre X.
b) Hallar la función de densidad de la variable (Z,W), siendo $Z=X^2$, $W=X+Y$.

5. Las expresiones de las rectas de regresión de dos v. a. X e Y son:

$3x+2y-26=0$ $\qquad$ $6x+y-31=0$

Calcular las medias marginales y el coeficiente de correlación.

6. Sabiendo que la v. a. (ξ,η) tiene distribución normal, que la suma de las varianzas marginales es 1.3 y que las rectas de regresión tienen por ecuaciones: $x-y+2=0$ y $3x-10y+40=0$; determinar su función de densidad.

7. Sean ξ y η variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu_1,\sigma_1)$ y $N(\mu_2,\sigma_2)$ respectivamente. ¿Para qué valores de $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ son $Z=\xi+\eta$ y $W=\xi-\eta$ independientes?.

8. Sea (X,Y) una v. a. bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=k\,\exp\left\{-\frac{1}{32}(x-1,y+2)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}\right\}$$

Determinar: a) el valor de k, b) las distribuciones marginales, c) las distribuciones condicionadas, d) las rectas de regresión.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (14)

1. Sea X v. a. con distribución U(–1,1) y sea $Y_k = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad X \in (-1, -1/k) \\ 0 & \text{si} \quad X \in (-1/k, 1/k) \\ 1 & \text{si} \quad X \in (1/k, 1) \end{cases}$

Estudiar a que v. a. Y converge en ley $\{Y_k\}_{k \in N}$

2. Sea $\{X_n\}_{n \in N}$ una sucesión de v. a. i. igualmente distribuidas con distribución *U(0,1)*.

Sean $\qquad Y_k = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}, \qquad Z_k = kY_k \qquad$ y $\qquad W_k = k^{\alpha}(1 - Y_k)$

Estudiar la convergencia en ley de Y_k, Z_k y W_k (según los valores de α).

3. Dada la sucesión $\{X_n\}_{n \in N}$ de v. a. independientes, tales que

$$X_n = \begin{cases} -2 & \text{con probabilidad } 1/4n \\ -1 & \text{con probabilidad } 1/4n \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - (1/n) \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/4n \\ 2 & \text{con probabilidad } 1/4n \end{cases}$$

estudiar la convergencia en probabilidad ¿Cumple dicha sucesión la ley fuerte de los grandes números?.

4. Sea $\{X_n\}_{n \in N}$ una sucesión de v. a. i. i. d. con distribución N(0,σ). Sea $Y_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{X_n}{2^{k+1-n}}$.

Estudiar la convergencia en ley de $\{Y_k\}_{k \in N}$.

5. Se lanza un dado 120 veces. Hallar la probabilidad de que salga el 4: (a) 18 veces o menos y (b) 14 veces o menos, supuesto que el dado no está trucado.

6. La duración, en meses, de una serie de bombillas, se distribuye según una exponencial de parámetro λ=1. Si cada vez que se estropea una bombilla, se reemplaza inmediatamente por otra, ¿cuál es el mínimo número de bombillas que se deben tener, para que, con probabilidad de 0,95, siempre haya luz durante dos años?.

7. En un hospital se realizan 10 intervenciones quirúrgicas de un cierto tipo mensualmente. Se sabe que por término medio una intervención se complica el 20% de las veces, y cuando ocurre es preciso disponer de un preparado sumamente costoso de un mes de vida útil. ¿De qué stock de preparados debe disponerse para estar seguros de cubrir todas las complicaciones en el 95% de los meses? Responder a la misma pregunta pero considerando 50 intervenciones mensuales.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (15)

1. Dado (Ω, Δ, P) espacio de probabilidad, y una familia de sucesos independientes $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$:
   a) Demostrar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$
   b) Sea $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, decir si es verdadero o falso, justificando, $P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(B \cap A_i)\right)$

2. Dada la sucesión de variables aleatorias independientes $(X_n)_{n>1}$ con distribución

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{nx+1}{n} & 0 \le x < \dfrac{n-1}{n} \\ 1 & x \ge \dfrac{n-1}{n} \end{cases}$$

   a) Dar la esperanza de X_n
   b) Dar la varianza de X_n
   c) Dar la función característica de X_n
   d) Estudiar la convergencia en Ley de la sucesión

3. En una red de comunicación digital (se transmiten bits, es decir, valores binarios), entre un nodo emisor y uno receptor pasa la información por n nodos intermedios que transmiten la información de cada bit recibido correctamente con probabilidad θ de forma independiente.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue la información correcta al receptor? Dar el valor en función de n y θ.
   b) Si una palabra o byte está formada por 8 bits siendo independiente la transmisión de cada uno ¿cuál es la probabilidad de que lleguen k bits correctos de una palabra?

4. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x, y) = ke^{x+y}$, si $x > 0, y > 0, x + y < 1$, y 0 en el resto. Se pide:
   a) Calcular el valor de k
   b) Comprobar si X e Y son independientes
   c) Obtener la línea general de regresión de Y sobre X
   d) Determinar la distribución de (Z, T) con $Z = X - Y$ y $T = X + Y$
   e) Dar las recta de regresión de Z sobre T.

5. Sean A y B dos sucesos de una σ-álgebra asociada a un experimento aleatorio. Decir si es verdadero o falso que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \le 1 - P(A \cap B)$ justificando la respuesta. ¿En qué casos se podría dar la igualdad $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$? Justificar

6. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x^2}{k} & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de k es función de distribución?
b) Dar la esperanza de X en función de k
c) Dar la función característica de X
d) Dar la esperanza de la variable $Y = \begin{cases} 15 & X = 1 \\ 20 & X > 1 \end{cases}$

7. Un sistema está formado por 3 componentes que funcionan de forma independiente. El sistema es observado al final de mes para ver si está funcionando. La probabilidad de que en un mes falle la componente 1 es 0.1, la componente 2 0.2 y la componente 3 0.3.
a) Determinar la fiabilidad del sistema durante un mes sabiendo que se entiende por fiabilidad la probabilidad de que el sistema funcione durante el mes, en cada uno de los tres supuestos siguientes:
i) El sistema está en serie, es decir, funciona sólo si todas las componentes están funcionando
ii) El sistema está en paralelo, es decir, funciona si al menos una de las componentes está funcionando
iii) El sistema es un 2 de 3, es decir, funciona si al menos dos de las componentes están funcionando
b) Si es un sistema 2 de 3 (el del apartado iii)) y el sistema ha fallado ¿cuál es la probabilidad de que la componente 2 no haya fallado?

8. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x,y) = kx,$ si $x < 1, y < 1, x + y > 1$, y 0 en el resto. Se pide:
a) Calcular el valor de k
b) Comprobar si X e Y son independientes
c) Obtener la línea general de regresión de Y sobre X
d) Determinar la distribución de (Z,T) con $Z = X - Y$ y $T = X + Y$

9. Un profesor tiene que corregir 81 exámenes. Determinar la probabilidad de que pueda hacerlo en cuatro días si dedica 5 horas diarias a corregir, y el tiempo que se dedica a la corrección de cada examen es en promedio de 15 minutos con una desviación típica de 4 minutos, siendo independiente el tiempo en corregir cada examen. ¿Cuántos días debería decir que va a tardar en corregir a 5 horas diarias para tener una probabilidad del 90% de tenerlos corregidos a tiempo?

10. Dado (Ω, Δ, P) espacio de probabilidad, una familia de sucesos arbitrarios $\{A_i\}_{i=1,\dots,n} \in \Delta$, y un suceso $B \in \Delta$ tal que $P(B) > 0$, se pide, decir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta:

a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

c) $P(A_1 / B) \geq 1 - \dfrac{P(A_1^c)}{P(B)}$

11. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \alpha x^2 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

a) Dar la esperanza de X
b) Dar la varianza de X
c) Dar la función característica de X

12. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x,y) = kxy, \quad \text{si } 0 < x < 2, x < y < x+2$, y 0 en el resto. Se pide:
    a) Calcular el valor de k
    b) Comprobar si las variables X e Y son independientes
    c) Obtener la línea general de regresión de Y sobre X
    d) Determinar la distribución de $Z = Y - X$

13. Dado (Ω, Δ, P) espacio de probabilidad, y $A, B \in \Delta$ dos sucesos tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, se pide, decir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta:
    a) $P\left(A/B\right) > P(A) \Rightarrow P\left(B/A\right) > P(B)$
    b) $P(A-B) = P(A) - P(B)$

14. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} e^x & x < -1 \\ 1/2 & -1 \le x < 1 \\ 1 - e^{-x} & x \ge 1 \end{cases}$$

    a) Dar la esperanza de X
    b) Dar la varianza de X
    c) Dar la función característica de X
    d) Dar la distribución de la variable $Y = 3X + 1$

15. De una estación de cercanías sale un tren dejando alternativamente 10 y 20 minutos después de la última salida. Un viajero llega a la estación en un momento cualquiera para tomar el primer tren que salga.
    a) Calcular la probabilidad de que el viajero tenga que esperar menos de 6 minutos, y la probabilidad de que el viajero tenga que esperar más de 10 minutos.
    b) Si cuando llega puede observar que el último tren pasó hace más de 6 minutos ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 5 minutos?
    c) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X que mide el tiempo de espera.
    d) Calcular el tiempo medio de espera.

16. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x,y) = \dfrac{3xy}{28}, \quad \text{si } 0 < x < 2, x < y < x+2$, y 0 en el resto. Se pide:
    a) Obtener la línea general de regresión de Y sobre X
    b) Determinar la distribución de $Z = Y - X$

17. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de densidad

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ e^{-(x-n)} & x \ge n \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad y casi seguro de la sucesión

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (1)-Soluciones

1. Se considera el espacio muestral equiprobable formado por todos los números de tres cifras que se pueden formar con 0,1,2,3,4,5 sin permitir repeticiones. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número par?

Sol: Posibles: $V_{6,3} - V_{5,2} = 6\cdot 5\cdot 4 - 5\cdot 2 = 100$

Favorables: $V_{5,2} + 2(V_{5,2} - V_{4,1}) = 20 + 2\cdot 16 = 52$

$P(par) = 52/100 = 0,52$

2. De una urna con *n* bolas numeradas se extrae una muestra con reemplazamiento de tamaño *p*. Calcular la probabilidad de que no haya repeticiones en la muestra.

Sol: $P(no\ repetir) = \dfrac{V_{n,p}}{VR_{n,p}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n^p}$

3. a) Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar un dado *n* veces. b) Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados *n* veces.

Sol: a) P(al menos un “6” en un dado n veces) = 1- P(ningún 6) = 1- $\dfrac{VR_{5,n}}{VR_{6,n}} = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

b) P(seis doble en una tirada) = 1/36

P(al menos un seis doble en n tiradas) = 1-P(ningún seis doble en n tiradas)=1-$(35/36)^n$

4. Se lanza un dado dos veces consecutivas. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: a) no aparece ningún 3 en los lanzamientos, b) en la primera tirada el resultado es menor o igual que 2, o bien en la segunda es mayor o igual que 5.

Sol: a) P(ningún 3 en dos tiradas)= 25/36

b) P(primera tirada $\leq$ 2 o segunda tirada ≥ 5)= P(primera tirada $\leq$ 2) + P(segunda tirada ≥ 5) - P(primera tirada $\leq$ 2 y segunda tirada ≥ 5) = 2/6+2/6-2/6 2/6 =2/3-1/9=5/9

5. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se extraen dos bolas simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos: a) las dos bolas son blancas, b) se obtiene una bola de cada color, c) al menos una bola es negra?.

a) P(2b) = $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{2}{15}$ b) P(1b y 1n) = $\dfrac{4\cdot 6}{\binom{10}{2}} = \dfrac{8}{15}$ c) P(al menos 1n)=1- P(2b)= 13/15

6. De una urna que contiene *n* bolas blancas y *m* bolas negras, se extraen simultáneamente *k* bolas al azar. Calcular la probabilidad de que exactamente *r* bolas sean blancas.

$r \leq \min\{n,k\} \quad P(r\ blancas) = \dfrac{\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$

7. Se lanzan 8 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener: a) tres caras exactamente, b) más caras que cruces, c) el mismo número de caras que de cruces?.

Sol: a) P(3 caras)= $\dfrac{PR^{8}_{5,3}}{2^8} = \dfrac{\binom{8}{3}}{2^8} = 7/32$

b) P(5,6, 7 u 8 caras exactamente) = $= \dfrac{\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}}{2^8} = 93/256$

c) P(4 caras y 4 cruces) = $\dfrac{\binom{8}{4}}{2^8} = 35/128$

8. De los 30 temas de un examen un alumno sabe 18. Se proponen dos tipos de examen: a) los miembros del tribunal eligen tres temas y de ellos debe contestar dos, b) el tribunal elige cinco temas y de ellos debe contestar tres. ¿Qué tipo de examen es más favorable para el citado alumno?.

Sol: 18 sabe, 12 no sabe

a) Saca 3 debe saber 2, P(saber 2 o 3 exactamente)= $\dfrac{\binom{18}{3}+\binom{18}{2}\binom{12}{1}}{\binom{30}{3}} = 0,653$

b) Saca 5 y saber 3 P(saber 3, 4 o 5 exact.) = $\dfrac{\binom{18}{5}+\binom{18}{4}\binom{12}{1}+\binom{18}{3}\binom{12}{2}}{\binom{30}{5}} = 0,695$

9. Se distribuyen 10 bolas en 4 cajas, de forma que cada bola tenga la misma probabilidad de caer en cualquiera de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan exactamente tres bolas en la primera caja?

Sol.: P(3 bolas en caja 1) = $\dfrac{\binom{10}{3}VR_{3,7}}{VR_{4,10}} = \dfrac{120\cdot 3^7}{4^{10}} = 0,2503$

10. Se distribuyen al azar *r* bolas, numeradas del 1 al *r*, en *n* cajas. Hallar la probabilidad de que una caja especificada contenga *k* bolas.

Sol.: r bolas en n cajas, P(k bolas en caja l) = $\dfrac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}$

11. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 azules y 4 blancas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 8 bolas, extraídas sin reemplazamiento: a) se obtengan 2 rojas, 2 verdes, 1 azul y 3 blancas, b) estén todas las bolas blancas, c) haya, al menos, una bola roja.

Sol:

a) P(2r 2v 1 a 3 b) = $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{14}{8}} = 240/3003$ b) P(4b)= $\dfrac{\binom{4}{4}\binom{10}{4}}{\binom{14}{8}} = 210/3003$

c) P(al menos 1r) = 1-P(ninguna r) = $1-\dfrac{\binom{9}{8}}{\binom{14}{8}} = 1-9/3003 = 2994/3003$

12. Hallar la probabilidad de que una mano de 13 cartas, de una baraja de 52, contenga 2, 7, 3 y 1 carta de cada palo.

Sol. P(2, 7, 3, 1 de cada palo)= $\dfrac{\binom{13}{2}\binom{13}{7}\binom{13}{3}\binom{13}{1}4!}{\binom{52}{13}} = 0{,}018$

13. Una persona ha comprado 40 billetes de una lotería de 1000. Si la lotería tiene tres premios a tres números diferentes, hallar la probabilidad de que gane: a) únicamente un premio, b) ningún premio, c) al menos un premio.

Sol. a) P(ganar 1 premio exact.) = $\dfrac{\binom{40}{1}\binom{960}{2}}{\binom{1000}{3}} = 0{,}1108$

b) P(ganar 0 premio exact.) = $\dfrac{\binom{960}{3}}{\binom{1000}{3}} = 0{,}88$

c) P(ganar al menos 1 premio) =1 – P(ninguno) = 1-0,88 = 0,12

14. Hallar la probabilidad de que al tirar una moneda 11 veces se obtenga la sexta cara en el lanzamiento undécimo. Calcular la probabilidad de que al tirar una moneda *n* veces obtengamos la *k*–ésima cara en la *n*–ésima tirada.

P(6 cara en lanzamiento 11) = $\dfrac{\binom{10}{5}}{2^{11}} = 0{,}123$

P(k ésima cara en n-ésimo lanzamiento) = $\dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n}}$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2)-Soluciones

1. Considerar las sucesiones de conjuntos definidas por:

$$A_n = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1+\frac{1}{n}\right\} \quad \text{y} \quad B_n = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le \frac{n}{1+n}\right\}.$$

Describir los conjuntos $\lim A_n$, $\lim A_n^c$, $\lim B_n$, $\lim B_n^c$ y $\lim(A_n \cap B_n^c)$.

Sol. $\lim A_n = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le 1\right\}$

$$\lim A_n^{\,c} = \lim\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \ge 1+1/n\right\} = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 > 1\right\}$$

$$\lim B_n = \lim\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le 1-\frac{1}{n+1}\right\} = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1\right\}$$

$$\lim B_n^c = \lim\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 > 1-\frac{1}{n+1}\right\} = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \ge 1\right\}$$

$$\lim\left(A_n \cap B_n^c\right) = \lim\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1+1/n,\, x^2+y^2 > 1-\frac{1}{n+1}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 1\right\}$$

2. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y sea

$$C = \left\{(a,b] = \left\{x\in\mathbb{Q} \,\middle|\, a<x\le b\right\} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Demostrar que la σ-álgebra engendrada por C coincide con el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Sol. Hay que demostrar que $\sigma(C) = \wp(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} q_n$

Sea $q\in\mathbb{Q}$, $\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(q-1/n, q] \in \sigma(C)$ porque es cerrada en la unión numerable

Si $A\in\wp(\mathbb{Q})$, $A = \bigcup_{q\in A}\{q\} \in \sigma(\text{C})$ por ser $\mathbb{Q}$ numerable y $\sigma(\text{C})$ σ-algebra (cerrada uniones numerables).

3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, P el subconjunto de los números pares, I el subconjunto de los números impares y $\wp(P)$ el conjunto de los subconjuntos de P. Sea $C = \left\{A\cup \text{I} \,\middle|\, A\in\wp(\text{P})\right\}$. ¿Es C un álgebra?.

Sol: C son conjuntos de la forma todos los impares con algún par.

$\left(A\cup I\right)^c = A^c \cap I^c = A^c \cap P \subseteq P$, luego no incluye impares, luego $\notin C$. No es álgebra

4. Demostrar que $C = \left\{X \subset I\!N \,\middle|\, X \text{ es finito o } I\!N - X \text{ es finito}\right\}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Sol: a) $X\in C \Rightarrow X^c \in C$? Si X es finito, X^c no lo es pero $\mathbb{N} - X^c = X$ sí, luego $X^c \in C$

b)

$$A,B\in C\Rightarrow\begin{cases}A,B\text{ finitos}\Rightarrow A\cup B\text{ finito}\\ A\text{ finito, }B\text{ no finito}\Rightarrow A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\text{ que no es finito,}\\ \qquad\qquad\text{pero el contrario si pues }B^c\text{ lo es}\\ A,B\text{ no finitos}\Rightarrow A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\text{ igual que el caso anterior}\end{cases}\Rightarrow A\cup B\in C$$

c) Unión numerable de disjuntos: $A_n=\{2n\}\in C$ porque es finito. $\bigcup_n A_n=\{pares\}\notin C$, pues no es finito y su contrario (impares) tampoco.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (3)

1. Sea (Ω, Δ, P) un espacio de probabilidad. Demostrar que si $A, B, C \in \Delta,$ con $A \cap B \subset C$ entonces $P(C^c) \le P(A^c) + P(B^c)$.

Sol. $A \cap B \subset C \Rightarrow C^c \subseteq \left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c \Rightarrow P(C^c) \le P\left(\left(A \cap B\right)^c\right)$

2. Sea (Ω, Δ, P) un espacio de probabilidad. Demostrar que $\forall A, B \in \Delta$ se tiene que $P(A \cap B) \ge 1 - P(A^c) - P(B^c)$. Generalizar el resultado a una colección numerable de sucesos.

Sol. $P(A \cap B) = 1 - P\left((A \cap B)^c\right) = 1 - P(A^c \cup B^c) \ge 1 - P(A^c) - P(B^c)$

Análogamente, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P\left((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c \right) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n{}^c) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n{}^c)$

3. Sea (Ω, Δ, P) un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \Delta$. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) $P(A) + P(B) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset.$

b) $P(A) = P(B) = p \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = p^2$.

c) $P(A) = P(B^c) \quad \Leftrightarrow \quad A^c = B.$

d) $P(A) = 0$ y $P(B) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = 0.$

Sol. a) Falso

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) > 1 \quad \Rightarrow P(A \cap B) > 1 - P(A \cup B) \ge 0 \Rightarrow \quad A \cap B \ne \emptyset$

b) Falso

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad P(1) = ... = P(6) = 1/6 \quad A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, P(A) = P(B) = 1/3$

$P(A \cap B) = P(2) = 1/6 \ne 1/3 \cdot 1/3$

c) Falso:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad P(1) = ... = P(6) = 1/6 \quad A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}, P(A) = P(B^c) = 1/3,$

$A^c = \{3,4,5,6\} \ne B = \{1,2,3,4\}$

d) $\Rightarrow$) Cierta por monotonía

$\Leftarrow$) Falsa: incompatibles no implica uno con probabilidad 0

4. Si A y B son dos sucesos, demostrar que:

$$P\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Sol.

$P\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right) \overset{disjuntos}{=} P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) = P\left(A - A \cap B\right) + P(B - A \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$

5. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{5}{8}$. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos: $A \cap B, A^c \cap B^c, A^c \cup B^c, A^c \cap B.$

Sol.

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=1/2+5/8-3/4=3/8$

$P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=1-3/4=1/4$

$P(A^c\cup B^c)=P((A\cap B)^c)=1-P(A\cap B)=1-3/8=5/8$

$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=5/8-3/8=1/4$

6. Sea (Ω,Δ,P) un espacio de probabilidad y sean $A,B,C\in\Delta$, con $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$, $P(C)=0.3$, $P(A\cap B)=0.1$ y $(A\cup B)\cap C=\varnothing$. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Sólo ocurre *A*. b) Los tres sucesos ocurren. c) Ocurren dos y no más.
d) Ocurre al menos uno. e) No ocurre ninguno de los tres. f) No ocurren más de dos.
g) A lo más uno de los tres ocurre.

Sol.: De los datos se deduce que C es disjunto con A y B.

a) Sólo ocurre *A:* $P(A\cap B^c\cap C^c)=P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=0.2-0.1=0.1$

b) Los tres sucesos ocurren: $P(A\cap B\cap C)=P(\varnothing)=0$

c) Ocurren dos y no más:

$P(\left(A\cap B\cap C^c\right)\cup\left(A\cap B^c\cap C\right)\cup\left(A^c\cap B\cap C\right))=P\left(A\cap B\cap C^c\right)=P(A\cap B)=0.1$

d) Ocurre al menos uno:

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)=0.2+0.4+0.3-0.1=0.8$

e) No ocurre ninguno de los tres. $P(A^c\cap B^c\cap C^c)=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.8=0.2$

f) No ocurren más de dos: $P\left((A\cap B\cap C)^c\right)=1-P(A\cap B\cap C)=1-0=1$

g) A lo más uno de los tres ocurre.

$P\left((A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)\right)=$

$=P(A\cap B^c\cap C^c)+P(A^c\cap B\cap C^c)+P(A^c\cap B^c\cap C)+P((A^c\cap B^c\cap C^c))=$

$=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)+P(C)=0.2-0.1+0.4-0.1+0.3+0.2=0.9$

7. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A)=1/4$, $P(B/A)=1/2$ y $P(A/B)=1/4$. Demostrar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones: a) $A\subset B$, b) *A* y *B* independientes, c) A^C y B^C independientes, d) *A* y *B* incompatibles, e) $P(A^C/B^C)=1/2$, f) $P(A/B)+P(A/B^C)=1$

Sol: a) Falso: $P(A\cap B)=P(B/A)P(A)=1/2\cdot 1/4=1/8\neq P(A)$

b) Cierta: $P(B)=P(A\cap B)/P(A/B)=\dfrac{1/8}{1/4}=1/2$, y así se tiene que condicionadas tienen la misma probabilidad que sin condicionar.

c) Cierto en general si A y B independientes:

$P(A^c\cap B^c)=P(\left(A\cup B\right)^c)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)-P(A)P(B)=$

$=(1-P(A))(1-P(B))=P(A^c)P(B^c)$

d) Falso, la probabilidad de la intersección es distinta de cero.

e) Falso, pues si son independientes es la probabilidad del contrario de A =3/4

f) Falso, pues si son independientes es 2 veces la probabilidad de A = 1/2

8. Sea (Ω,Δ) un espacio probabilizable y sea $\{P_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión de medidas de probabilidad definidas sobre él. Demostrar que la aplicación $P:\Delta\to I\!R$, definida por $P(A)=\sum_{n\in I\!N} a_n\,P_n(A)$ con $a_n\in I\!R^+\cup\{0\}$ y $\sum_{n\in I\!N} a_n=1$, es una medida de probabilidad

a) $0\le P(A)=\sum_{n\in I\!N} a_n\,P_n(A)\le \sum_{n\in I\!N} a_n=1$

b) Ax1: $P(\Omega)=\sum_{n\in I\!N} a_n\,P_n(\Omega)=\sum_{n\in I\!N} a_n=1$

$\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq\Delta \quad A_i\cap A_j=\varnothing$

c) Ax2: $P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_n(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{m=1}^{\infty}P_n(A_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_nP_n(A_m)=$

$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_n(A_m)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m)$

9. Sea $\Omega=I\!N\cup\{0\}$ y $A=P(\Omega)$. Demostrar que las siguientes funciones son probabilidades:

a) $P(A)=\sum_{x\in A}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, con $\lambda>0$. b) $P(A)=\sum_{x\in A}p(1-p)^x$, con $0<p<1$.

Sol.: a) $P(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ge 0 \quad P(\Omega)=\sum_{x=0}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

b) $P(x)=p(1-p)^x\ge 0 \quad P(\Omega)=\sum_{x=0}^{\infty}p(1-p)^x=\dfrac{p}{1-(1-p)}=1$

En general, si se define como una suma, la aditividad se cumple:
$\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq\Delta \quad A_i\cap A_j=\varnothing \quad P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m)=\sum_{a_n\in\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m}P(a_n)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a_n\in A_m}P(a_n)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m)$

10. Sea el espacio probabilístico $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$ y sea la función: $P(A)=\sum_{i\in A}\dfrac{1}{2^i} \quad \forall A\in\wp(\mathbb{N})$

a) Comprobar que *P* es una medida de probabilidad
b) Calcular las probabilidades del conjunto de números pares y del de los impares

Sol: a) $P(x)=\dfrac{1}{2^x}\ge 0 \quad P(\mathbb{N})=\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1/2}{1-1/2}=1$

b) $P(pares)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{2n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}=\dfrac{1/4}{1-1/4}=1/3 \quad P(impares)=1-P(pares)=2/3$

11. Sabiendo que $P(A)=\dfrac{3}{4}$ y que $P(B)=\dfrac{3}{8}$, demostrar que:

a) $P(A\cup B)\ge\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{8}\le P(A\cap B)\le\dfrac{3}{8}$.

a) $P(A\cup B)\ge P(A)=\dfrac{3}{4}$ b) $P(A\cap B)\le P(B)=3/8; \quad P(A\cap B)=1-P((A\cap B)^c)=$
$=1-P(A^c\cup B^c)\ge 1-P(A^c)-P(B^c)=1-1/4-5/8=1/8$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (4)

1. Se tiene un manojo de *n* llaves y se desea abrir una puerta. Suponiendo que la llave probada se quita del manojo, ¿cuál es la probabilidad de que la puerta se abra en la *k*-ésima prueba y no antes?. Calcular la probabilidad del mismo suceso suponiendo que la llave probada no se quita del manojo.
Sol: k extracciones siendo la última la buena

Sin reemplazamiento $P(k-esima\ buena)=\dfrac{V_{n-1,k-1}}{V_{n,k}}=\dfrac{(n-1)...(n-1-k+1+1)}{n(n-1)...(n-k+1)}=1/n$

Con reemplazamiento $P(k-esima\ buena)=\dfrac{VR_{n-1,k-1}}{VR_{n,k}}=\dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}=\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{1}{n})^{k-1}$

2. A una reunión asisten 18 personas, si se forman consecutivamente tres grupos de cinco personas, ¿cuál es la probabilidad de que en algún grupo entre una persona determinada?, ¿y de que entren tres personas determinadas, las tres en el mismo grupo?

P(persona A en un grupo)= $\dfrac{\binom{17}{14}}{\binom{18}{15}}=15/18=5/6$

P(A,B y C en el mismo grupo)= $\dfrac{3\binom{15}{2}\binom{13}{5}\binom{8}{5}}{\binom{18}{5}\binom{13}{5}\binom{8}{5}}=\dfrac{3\binom{15}{2}}{\binom{18}{5}}=5/136$

3. Una urna contiene 5 bolas negras y 4 blancas, otra urna contiene 4 bolas negras y 5 blancas. a) Se traslada una bola, elegida aleatoriamente, de la primera urna a la segunda y a continuación se extrae una bola de la segunda urna; ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?. b) si se trasladan dos bolas de la primera a la segunda urna, ¿cuál es la probabilidad de extraer bola blanca?

Sol: P(2ª b) = P(2ªb/1ªb)P(1ªb)+P(2ªb/1ªn)P(1ªn)= $\dfrac{6}{10}\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{10}\dfrac{5}{9}=49/90$

2 bolas P(2ª b) =

P(2ªb/bb)P(bb)+P(2ªb/bn)P(bn)+P(2ªb/nn)P(nn)= $\dfrac{7}{11}\dfrac{4}{9}\dfrac{3}{8}+\dfrac{6}{11}\dfrac{5}{9}\dfrac{4}{8}+2\dfrac{5}{11}\dfrac{5}{9}\dfrac{4}{8}=53/99$

4. Un estudiante que sabe una proporción *p* de las preguntas de una asignatura, se somete a un examen tipo test, en el que cada pregunta cuenta con *m* posibles respuestas, igualmente verosímiles cuando no conoce la respuesta. Calcular la probabilidad de que el estudiante conociese la respuesta a una pregunta que ha contestado correctamente. Según ello, qué nota debe atribuírsele en función del número de aciertos?

P(conocer pregunta/responde correcto)=

$$\frac{\text{P(responde correcto/conoce respuesta)P(conocer)}}{\text{P(responde correcto/conocer)P(conocer)+P(responde correcto/no conocer)P(no conocer)}}=$$

$$=\frac{1p}{1p+1/m(1-p)}=\frac{mp}{mp+1-p}=\frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Puntuación esperada: 1(p+1/m(1-p))-k(m-1)(1-p)/m)=p, despejando k=1/(m-1)

5. En una urna se introducen *n* bolas, cada una de las cuales puede ser blanca o negra con igual probabilidad. A continuación se extraen *k* bolas con reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas, si las *k* extraídas han resultado ser todas blancas?.

P(n blancas/k salen blancas)=

$$\frac{P(\text{k salen blancas/n blancas})\text{P(n blancas)}}{\sum_{\text{i=0}}^{\text{n}}\text{P(k salen blancas/i blancas)P(i blancas)}} = \frac{1(1/2)^n}{\sum_{i=0}^{n}(i/n)^k\binom{n}{i}(1/2)^n} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n}(i/n)^k\binom{n}{i}}$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (5)-Soluciones

1. A una persona A se le pasa un papel que marca con el signo +, con probabilidad 1/3, o con el signo -, con probabilidad 2/3. A pasa el papel a B, que puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a C, quien puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a D, quien puede cambiar o no, el signo antes de pasárselo a un árbitro. La probabilidad con que cada una de las personas B, C o D cambia el signo es de 2/3. Si el árbitro vio un signo + en el papel ¿cuál es la probabilidad de que A escribiera un signo +?

Sol:

$$P(A+/arb+)=\frac{P(arb+/A+)P(A+)}{P(arb+/A+)P(A+)+P(arb+/A-)P(A-)}=$$

$$=\frac{(P(0cambios)+P(2cambios))1/3}{(P(0cambios)+P(2cambios))1/3+(P(1cambios)+P(3cambios))2/3}=$$

$$=\frac{(1/3)^3+\binom{3}{2}(1/3)(2/3)^2}{(1/3)^3+\binom{3}{2}(1/3)(2/3)^2+2\left(\binom{3}{1}(1/3)^2(2/3)+(2/3)^3\right)}=\frac{13}{41}$$

2. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

a) $P(B/A)=P(B/A^c) \quad \Rightarrow \quad A$ y B independientes.

Cierto:

$$P(B/A)=P(B/A^c)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A^c\cap B)}{P(A^c)}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)\left(1-P(A)\right)=P(A)\left(P(B)-P(A\cap B)\right)\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)-P(A)P(A\cap B)=P(A)P(B)-P(A)P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

b) $P(A/B)>P(A) \quad \Rightarrow \quad P(B/A)>P(B)$.

Cierto:

$$P(A/B)>P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(A\cap B)>P(A)P(B)\Rightarrow$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}>\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

c) $P(A)=a$ y $P(B)=b>0 \quad \Rightarrow \quad P(A/B)\geq(a+b-1)/b$.

Cierto:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}=\frac{a+b-P(A\cup B)}{b}\geq\frac{a+b-1}{b}$$

d) $P(A)>P(B) \quad \Rightarrow \quad \forall C$ con $P(C)>0$ es $P(A/C)>P(B/C)$.

Falso: por ejemplo, si C es tal que $A\cap C=\varnothing$ y $C\subseteq B\Rightarrow P(A/C)=0\not> P(B/C)=1$

(Un caso así, al tirar un dado A={1,2,3} B={5,6} C={6})

3. Dos de las cuatro válvulas de un aparato, que funcionan independientemente, han fallado. Calcular la probabilidad de que hayan sido la 1 y la 2, si la probabilidad de que falle la válvula *i* es *i*/10.

$$P(F1,F2/\ fallo\ en\ 2 valvulas\ exactamente)=$$
$$=\frac{P(F1,F2,NF3,NF4)}{\begin{array}{l}(P(F1,F2,NF3,NF4)+P(F1,NF2,F3,NF4)+P(F1,NF2,NF3,F4)+P(NF1,F2,F3,NF4)+\\ +P(NF1,F2,NF3,F4)+P(NF1,NF2,F3,F4))\end{array}}=$$
$$=\frac{1/10\cdot 2/10\cdot 7/10\cdot 6/10}{\left(1\cdot 2\cdot 7\cdot 6+1\cdot 8\cdot 3\cdot 6+1\cdot 8\cdot 7\cdot 4+9\cdot 2\cdot 3\cdot 6+9\cdot 2\cdot 7\cdot 4+9\cdot 8\cdot 3\cdot 4\right)/10^4}=$$
$$=84/2144=21/536=0,039$$

4. Se dispone de una moneda y dos dados A y B. A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda y, si sale cara, se lanza repetidas veces el dado A, pero si sale cruz, se hace lo mismo con el dado B. a) Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento la cara observada sea roja. b) Sabiendo que en los dos primeros lanzamientos se han observado dos caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado lanzado sea el A?. c) Generalizar el apartado anterior considerando *n* lanzamientos y *n* caras rojas.

Sol:

a) $P(1^{a}\,roja)=P(1^{a}\,r/A)P(A)+P(1^{a}\,r/B)P(B)=4/6\,1/2+2/6\,1/2=1/2$

b) $P(A/2r)=\dfrac{P(2r/\mathrm{A})\mathrm{P(A)}}{P(2r/\mathrm{A})\mathrm{P(A)}+P(2r/B)P(B)}=\dfrac{(4/6)^2\,1/2}{(4/6)^2\,1/2+(2/6)^2\,1/2}=16/20=4/5$

c) $P(A/\mathrm{n}r)=\dfrac{P(\mathrm{n}r/\mathrm{A})\mathrm{P(A)}}{P(\mathrm{n}r/\mathrm{A})\mathrm{P(A)}+P(\mathrm{n}r/B)P(B)}=\dfrac{(4/6)^n\,1/2}{(4/6)^n\,1/2+(2/6)^n\,1/2}=\dfrac{4^n}{4^n+2^n}=\dfrac{2^n}{2^n+1}$

5. Se dispone de dos urnas A y B. La urna A contiene 6 bolas negras, 4 blancas y 1 roja; y la urna B contiene 8 bolas negras, 1 blanca y 2 rojas. El experimento consiste en lanzar tres dados y extraer 4 bolas sin reemplazamiento, de la urna A si en el lanzamiento de los dados se obtuvo algún número par, y de la urna B en caso contrario. Habiéndose obtenido 3 bolas negras y 1 blanca, calcular la probabilidad de haber obtenido algún número par.

Sol: $P(A/3n1b)=\dfrac{P(3n1b/A)P(A)}{P(3n1b/A)P(A)+P(3n1b/\mathrm{B})P(\mathrm{B})}=\dfrac{(1/2)^3\binom{6}{3}4/\binom{11}{4}}{(1/2)^3\binom{6}{3}4/\binom{11}{4}+(1-(1/2)^3)\binom{8}{3}/\binom{11}{4}}=$

$$=\frac{1/8\cdot 20\cdot 4}{1/8\cdot 20\cdot 4+7/8\cdot 56}=\frac{20}{20+98}=10/59$$

6. Un punto M se mueve en el plano, partiendo del origen, por saltos de unidades enteras. Cuando está en la posición (m,n) pasa a la posición (m+1,n) con probabilidad *p* y a la posición (m,n+1) con probabilidad 1-*p*. Determinar la probabilidad de que M pase por la posición (a,b).

Sol: $P(pasar(a,b)=P(a\ derecha,b\ arriba)=\binom{a+b}{a}p^a(1-p)^b$

7. Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras. Se pasan 4 bolas a una segunda urna. De la segunda urna se extraen dos bolas una a una sin reemplazamiento. Si la primera bola extraída es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca?.

Sol:

$$P(2^{a}b/1^{a}n)=\frac{P(2^{a}b\cap 1^{a}n)}{P(1^{a}n)}=$$

$$=\frac{P(2^{a}b1^{a}n/4b)P(4b)+P(2^{a}b1^{a}n/3\mathrm{b}1\mathrm{n})P(3\mathrm{b}1\mathrm{n})+P(2^{a}b1^{a}n/2b2n)P(2b2n)+P(2^{a}b1^{a}n/1\mathrm{b}3\mathrm{n})P(1\mathrm{b}3\mathrm{n})+P(2^{a}b1^{a}n/4n)P(4n)}{P(1^{a}n/4b)P(4b)+P(1^{a}n/3\mathrm{b}1\mathrm{n})P(3\mathrm{b}1\mathrm{n})+P(1^{a}n/2b2n)P(2b2n)+P(1^{a}n/1\mathrm{b}3\mathrm{n})P(1\mathrm{b}3\mathrm{n})+P(1^{a}n/4n)P(4n)}=$$

$$=\frac{0+1\cdot 1/4\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}}+2/3\cdot 2/4\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{\binom{9}{4}}+1/3\cdot 3/4\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{3}}{\binom{9}{4}}+0\cdot 4/4\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}}{0+1/4\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}}+2/4\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{\binom{9}{4}}+3/4\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{3}}{\binom{9}{4}}+4/4\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}}=$$

$$=\frac{1/4\cdot 10\cdot 4+4/12\cdot 10\cdot 6+1/4\cdot 20}{1/4\cdot 10\cdot 4+2/4\cdot 10\cdot 6+3/4\cdot 20+1}=\frac{40+80+20}{40+120+60+4}=\frac{140}{224}=\frac{35}{56}=5/8$$

8. Obtener la probabilidad de que, en un grupo de diez personas, al menos dos celebren su cumpleaños el mismo día del año. Supóngase que la probabilidad de nacimiento de cada día del año es la misma y que los años considerados no son bisiestos. ¿Con cuántas personas es esa probabilidad superior a ½?

Sol: P(al menos dos el mismo día) = 1- P(ninguno el mismo día)= $1-\frac{365\cdot 364\cdots 356}{365^{10}}=$

0.116948

N=23 primero tal que esa probabilidad es mayor que ½ (0.5073).

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (6) - Soluciones

1. Dada la función de distribución, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ (1+x)/10 & \text{si} \quad 1 \le x < (3/2) \\ (2x-1)/6 & \text{si} \quad (3/2) \le x < (5/2) \\ 1 & \text{si} \quad x \ge (5/2) \end{cases}$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

$\left(1,\frac{3}{2}\right], \left[1,\frac{3}{2}\right], \left(1,\frac{3}{2}\right), \left[1,\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2},2\right], \left[\frac{1}{2},2\right], \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \mathbb{Q}, \mathbb{I}$

Sol: $P((1,3/2]) = F(3/2) - F(1) = (2\cdot 3/2-1)/6-(1+1)/10 = 2/6-2/10 = 1/3-1/5 = 2/15$

$P([1,3/2]) = F(3/2) - F(1^-) = (2\cdot 3/2-1)/6-0 = 2/6 = 1/3$

$P((1,3/2)) = F(3/2^-) - F(1) = (1+3/2)/10-(1+1)/10 = 1/20$

$P([1,3/2)) = F(3/2^-) - F(1^-) = (1+3/2)/10 = 5/20 = 1/4$

$P((1/2,2]) = F(2) - F(1/2) = (2\cdot 2-1)/6-0 = 3/6 = 1/2$

$P([1/2,2]) = F(2) - F(1/2^-) = (2\cdot 2-1)/6-0 = 3/6 = 1/2$

$P((1/2,3/2)) = F(3/2^-) - F(1/2) = (1+3/2)/10-0 = 5/20 = 1/4$

$P([1/2,3/2)) = F(3/2^-) - F(1/2^-) = (1+3/2)/10-0 = 5/20 = 1/4$

$P(\mathbb{Q}) = P(1) + P(3/2) + P(5/2) = 2/10+2/6-5/20+1-4/6 = 37/60$
$P(\mathbb{I}) = 1 - P(\mathbb{Q}) = 1-37/60 = 23/60$

2. Determinar el valor de k para que las siguientes funciones sean de densidad:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ kxe^{-x/2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{5k}{5+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \ge 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ kx^2e^{-x/2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad 0 < x < \sqrt{2}/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Sol.:

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} kxe^{-x/2}dx = k\left\{\left[-2xe^{-x/2}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2e^{-x/2}dx\right\} = k\left[-4e^{-x/2}\right]_0^{\infty} = 4k = 1 \Rightarrow k = 1/4$

b) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5k}{5+x^2}dx = k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(x/\sqrt{5}\right)^2}dx = k\sqrt{5}\left[arctg(x/\sqrt{5})\right]_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{5}k(\pi/2+\pi/2) = \sqrt{5}\pi k = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{5}\pi}$

c) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty} kx^2e^{-x/2}dx=k\left\{\left[-2x^2e^{-x/2}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-4xe^{-x/2}dx\right\}=k\int_0^{\infty}4xe^{-x/2}dx=$

$=k\left\{\left[-8xe^{-x/2}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-8e^{-x/2}dx\right\}=k\left[-16e^{-x/2}\right]_0^{\infty}=16k=1\Rightarrow k=1/16$

d) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{k}{\sqrt{1-x^2}}dx=k\left[\arcsin\right]_0^{\sqrt{2}/2}=k\left(\pi/4-0\right)=\pi k/4=1\Rightarrow k=\frac{4}{\pi}$

3. Sea la función de densidad $f(x)=\begin{cases}|1-x| & \text{si } 0<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

Determinar la función de distribución asociada y la probabilidad de los siguientes sucesos: [0,1], [–2,2], (1/2,+∞) y {0,1/2,1}.

Sol:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } 0<x<1\\ x-1 & \text{si } 1<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}\Rightarrow F(\mathrm{x})=\begin{cases}0 & x<0\\ x-x^2/2 & 0\le x<1\\ x^2/2-x+1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$P\left(\left[0,1\right]\right)=F(1)-F(0^-)=1/2-0=1/2\quad P\left(\left[-2,2\right]\right)=F(2)-F(2^-)=1-0=1$

$P\left(\left(1/2,\infty\right)\right)=1-F(1/2)=1-(1/2-1/8)=5/8\quad P\left(\left\{0,1/2,1\right\}\right)=0$

4. Sea $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-k(1-x) & \text{si } 0\le x<k\\ 1 & \text{si } x\ge k\end{cases}$

Determinar *k* para que *F* sea función de distribución. Clasificar *F* según los valores de *k*.

Sol.:

- Sí $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$

- Creciente: Derivada = $k\ge 0$

$F(0)=1-k\ge F(0^-)=0\Rightarrow k\le 1,\quad F(k)=1\ge F(k^-)=1-k(1-k)=1-k+k^2\Rightarrow -k(1-k)\le 0$ como k está entre 0 y 1, siempre es cierto. Entonces es función de distribución para $k\in\left[0,1\right]$.

k=0, discreta. Degenerada en 0 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}\Rightarrow P(0)=1$

¿Existe k tal que $F(0)=1-k=F(0^-)=0,\quad F(k)=1=F(k^-)=1-k(1-k)=1-k+k^2$? Sí, k=1. Entonces absolutamente continua con función de densidad $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & resto\end{cases}$

Si $k\in\left(0,1\right)$ mixta, con $P(0)=1-k\quad P(k)=k-k^2$ y $F'(\mathrm{x})=\begin{cases}k & 0<x<k\\ 0 & resto\end{cases}$

5. Sea $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<(1/3) \\ x^{2\alpha-1} & \text{si} \quad (1/3)\le x<\alpha \\ 1 & \text{si} \quad x\ge\alpha \end{cases}$

Determinar los valores de α para que F sea función de distribución. ¿Para qué valores de α F es discreta?. ¿ Para qué valores de α es F absolutamente continua?.

Sol: - Sí $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$

- Creciente: Derivada = $(2\alpha-1)x^{2\alpha-2}\ge 0 \Rightarrow$ como $x\ge 0 \Rightarrow 2\alpha-1\ge 0 \Rightarrow \alpha\ge 1/2$

$$F(1/3)=1/3^{2\alpha-1}\ge F(1/3^-)=0 \text{ siempre}, \quad F(\alpha)=1\ge F(\alpha^-)=\alpha^{2\alpha-1}\Rightarrow \alpha^{2\alpha-1}\le 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \alpha\le 1, 2\alpha-1>0\Rightarrow 1/2<\alpha\le 1 \\ 2\alpha-1=0\Rightarrow \alpha=1/2 \qquad \Rightarrow 1/2\le\alpha\le 1 \\ \alpha>1, 2\alpha-1<0\Rightarrow imposible \end{cases}$$

$\alpha=1/2$, discreta. Degenerada en 1/3 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<1/3 \\ 1 & x\ge 1/3 \end{cases}\Rightarrow P(1/3)=1$

Para ningún valor es absolutamente continua, pues $F(1/3)=1/3^{2\alpha-1}>F(1/3^-)=0$ siempre

6. Dada la función de distribución $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3x/40 & 0\le x<1 \\ ([x]/24)+(3x/40) & 1\le x<6 \\ (1/4)+(3x/40) & 6\le x<10 \\ 1 & x\ge 10 \end{cases}$

Encontrar la parte discreta y la parte continua, y calcular la probabilidad del intervalo (3,8)

Sol.:

$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=1/24$ acumulando ¼ de la probabilidad, y continua

$F'(x)=\begin{cases} 3/40 & 0<x<10 \\ 0 & resto \end{cases}$ acumulando ¾ de la probabilidad.

$$P(3,8)=F(8^-)-F(3)=P(4)+P(5)+P(6)+\int_3^8 F'(x)dx=1/4+24/40-(3/24+9/40)=3/24+15/40=1/2$$

7. De una urna que contiene tres bolas blancas, dos negras y una verde, se extraen tres bolas al azar y se considera la variable aleatoria $X\equiv$"número de bolas blancas obtenidas". Determinar la probabilidad inducida por X.

Sol: Sin reemplazamiento:

$$P_X(0)=P(ninguna\ blanca)=\frac{1}{\binom{6}{3}}=1/20 \quad P_X(1)=P(una\ blanca)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}=9/20$$

$$P_X(2) = P(\text{dos } blancas) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = 9/20 \quad P_X(3) = P(\text{tres } blancas) = \frac{1}{\binom{6}{3}} = 1/20$$

Con reemplazamiento:

$$P_X(0) = P(ninguna\ blanca) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1/8 \quad P_X(1) = P(una\ blanca) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3/8$$

$$P_X(2) = P(\text{dos } blancas) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3/8 \quad P_X(3) = P(\text{tres } blancas) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1/8$$

8. Sea $\Omega = Z^+$, $\mathrm{A} = P(\Omega)$ y $P(\omega) = 2^{-\omega}$. Se define $X(\omega)$=resto de ω (módulo k). Calcular $P(X=r)$ para $r=0,1,\ldots,k-1$.

Sol.:

$$r = 0 \quad P(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(nk) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-k}\right)^n = \frac{2^{-k}}{1-2^{-k}} = \frac{1}{2^k - 1}$$

$$r = 1,\ldots,k-1 \quad P(X = r) = \sum_{n=0}^{\infty} P(nk+r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(nk+r)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-r}\left(2^{-k}\right)^n = \frac{2^{-r}}{1-2^{-k}} = \frac{2^{k-r}}{2^k - 1}$$

9. Una urna contiene N bolas numeradas. Se extraen n bolas al azar con reemplazamiento y se consideran las variables aleatorias X≡"menor de los números obtenidos" y Y≡"mayor de los números obtenidos". Obtener las correspondientes funciones de distribución y, a partir de ellas, las funciones de probabilidad.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\text{menor nº obtenido } \le \text{x})\text{=1-}P(\text{menor nº obtenido >x})\text{=}1 - P(todos > x) =$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(j - \acute{e}simo > x) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - P(\text{j}-\text{ésimo} \le \text{x}) = 1 - (1 - \text{P}(1^\text{o} \le \text{x}))^n = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{[x]}{N}\right)^n & 1 \le x < N \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$P(X = j) = 1 - \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n - (1 - \left(1 - \frac{j-1}{N}\right)^n) = \left(1 - \frac{j-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n \quad j = 1,\ldots,N$$

$$F_Y(\text{y}) = P(\text{Y} \le y) = P(\text{mayor nº obtenido } \le y)\text{=P}(todos \le y) = \prod_{j=1}^{n} P(j - \acute{e}simo \le y) = (\text{P}(1^\text{o} \le y))^n == \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \left(\dfrac{[y]}{N}\right)^n & 1 \le y < N \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

$$P(\text{Y} = j) = \left(\frac{j}{N}\right)^n - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n \quad j = 1,\ldots,N$$

10. Dada X v.a. con función de densidad $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$ obtener la distribución de la variable $Y = 2X + 5$ y $Z = X^2$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P_X(2X+5 \le y) = P_X(X \le \frac{y-5}{2}) = \begin{cases} 0 & \frac{y-5}{2} < 0 \\ 1-e^{-\frac{y-5}{2}} & \frac{y-5}{2} \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 5 \\ 1-e^{-\frac{y-5}{2}} & y \ge 5 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-\frac{y-5}{2}}/2 & y > 5 \\ 0 & resto \end{cases} = f_X(\frac{y-5}{2}).\left|(h^{-1}y)'\right| = \begin{cases} e^{-\frac{y-5}{2}}\frac{1}{2} & \frac{y-5}{2} \ge 0 \\ 0\,\frac{1}{2} & \frac{y-5}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\frac{y-5}{2}}/2 & y > 5 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^2 \le z) = \begin{cases} P_X(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f(x)dx & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-x}dx & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-\sqrt{z}} & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (7)

1. Sea X una v. a. con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \alpha x & \text{si} \quad 0\le x<\alpha \\ 1 & \text{si} \quad x\ge\alpha \end{cases}$$

donde $\alpha\in[0,1]$.

a) Determinar los valores de α para los que F es discreta y los valores para los que F es continua.

b) Calcular $\mathrm{E}_\alpha[X]$, $\mathrm{E}_\alpha\left[e^X\right]$ y $P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}$.

Sol:

a) Para que sea función de distribución: $\alpha\ge 0$ y $\alpha^2\le 1\Rightarrow 0\le\alpha\le 1$

Si $\alpha=0\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}\Rightarrow P(X=0)=1$ Discreta

$\alpha=1\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & resto \end{cases}$ Absolutamente continua

b) $$\mathrm{E}_\alpha[X]=\begin{cases} 0 & \alpha=0 \\ \int_0^1 xdx=1/2 & \alpha=1 \\ \int_0^\alpha \alpha xdx+\alpha(1-\alpha^2)=\alpha-\alpha^3/2 & 0<\alpha<1 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}_\alpha\left[e^X\right]=\begin{cases} e^0\cdot 1=1 & \alpha=0 \\ \int_0^1 e^x dx=e-1 & \alpha=1 \\ \int_0^\alpha \alpha e^x dx+e^\alpha(1-\alpha^2)=\alpha(e^\alpha-1)+e^\alpha(1-\alpha^2)=e^\alpha(\alpha-\alpha^2+1)-\alpha & 0<\alpha<1 \end{cases}$$

$$P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}=\begin{cases} 0-0=0 & \alpha=0 \\ 1-1/2=1/2 & \alpha=1 \\ 1-1=0 & 0<\alpha<1/2 \\ 1-F(1/2^-)=1-\alpha/2 & 1/2\le\alpha<1 \end{cases}$$

2. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} kx+\frac{1}{2} & \text{si} \ -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar los valores de k para los que f es función de densidad.

b) Hallar la media, la varianza y la mediana de X.

Sol:

a) $-k+1/2\ge 0 \quad y \quad k+1/2\ge 0\Rightarrow -1/2\le k\le 1/2$

$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(kx+1/2)dx=k/2+1/2-(k/2-1/2)=1$ para todo k.

b) $E(X)=\int_{-1}^{1}(kx+1/2)xdx=\int_{-1}^{1}(kx^2+x/2)dx=\left[kx^3/3+x^2/4\right]_{-1}^{1}=k/3+1/4+k/3-1/4=2k/3$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}(kx+1/2)x^2dx=\int_{-1}^{1}(kx^3+x^2/2)dx=\left[kx^4/4+x^3/6\right]_{-1}^{1}=k/4+1/6-k/4+1/6=1/3$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=1/3-4k^2/9$$
$$Me/F(Me)=1/2\Rightarrow\int_{-1}^{Me}(kx+1/2)dx=1/2\Rightarrow\left[kx^2/2+x/2\right]_{-1}^{Me}=kMe^2/2+Me/2-k/2+1/2=1/2$$
$$\Rightarrow kMe^2/2+Me/2-k/2=0\Rightarrow \text{Si } k\neq 0, Me=\frac{-1/2\pm\sqrt{1/4+k^2}}{k}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4k^2}}{2k}=-\frac{1}{2k}+\sqrt{1+\frac{1}{4k^2}}$$

(descartado el – por resultar menor que -1). Si k=0, Me=0.

3. Sea X variable aleatoria con función de distribución F

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ \dfrac{(x+2)^2}{32} & \text{si } -1\le x<2\\ 1 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Calcular su esperanza y su varianza.
Sol:

Distribución mixta. $P(X=-1)=1/32 \quad P(X=2)=1-16/32=1/2 \quad F'(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{16} & -1<x<2\\ 0 & resto\end{cases}$

$$E(X)=-1/32+1+\int_{-1}^{2}x\frac{x+2}{16}dx=-1/32+1+\left[x^3/48+x^2/16\right]_{-1}^{2}=-1/32+1+1/6+1/4+1/48-1/16=43/32$$
$$E(X^2)=1/32+2+\int_{-1}^{2}x^2\frac{x+2}{16}dx=1/32+2+\left[x^4/64+x^3/24\right]_{-1}^{2}=509/192$$
$$V(X)=509/192-(43/32)^2\approx 0{,}84$$

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_\alpha(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-\alpha\\ (\alpha/2)x+(\alpha^2/2) & \text{si } -\alpha\le x<\alpha\\ 1 & \text{si } x\ge\alpha\end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de α es F función de distribución?.
b) ¿Para cuáles de dichos valores de α es F absolutamente continua?, ¿para cuáles es discreta?.
c) Calcular $\mathrm{E}_\alpha[X]$ y $P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}$

Sol.:

a) $\alpha/2\ge 0\Rightarrow\alpha\ge 0$. Además $-\alpha^2/2+\alpha^2/2\ge 0$ (siempre) y $\alpha^2/2+\alpha^2/2\le 1\Rightarrow\alpha\le 1.\Rightarrow 0\le\alpha\le 1$

b) Discreta $\alpha=0$. Degenerada en 0, $P(X=0)=1$

Absolutamente continua $\alpha^2/2+\alpha^2/2=1\Rightarrow\alpha=1,\quad f(x)=\begin{cases}1/2 & -1<x<1\\ 0 & resto\end{cases}$

c) $$E_\alpha[X]=\begin{cases} 0 & \alpha=0 \\ \int_{-1}^{1} x/2dx=0 & \alpha=1 \\ \alpha(1-\alpha^2)+\int_{-\alpha}^{\alpha} x\alpha/2dx=\alpha(1-\alpha^2) & 0<\alpha<1 \end{cases}$$

$$P_\alpha\left\{\frac{1}{2}\le X<1\right\}=F(1^-)-F(1/2^-)=\begin{cases} 0 & \alpha<1/2 \\ 1-\alpha/4-\alpha^2/2 & \alpha\ge 1/2 \end{cases}$$

5. Sea X una v. a. que toma valores enteros positivos con probabilidad

$$P(X=k)=c(1-\lambda)^k, \quad k=1,2,\dots \quad (0<\lambda<1)$$

Determinar el valor de la constante c, la esperanza de X y su varianza.
Sol:

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}c(1-\lambda)^k=c\frac{1-\lambda}{1-(1-\lambda)}=1\Rightarrow c=\frac{\lambda}{1-\lambda}\Rightarrow P(X=k)=\lambda(1-\lambda)^{k-1}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda(1-\lambda)^{k-1}=-\lambda\left[\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda)^k\right]'=-\lambda\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)'=-\lambda\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda^2}=1/\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\lambda(1-\lambda)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k(\mathrm{k}-1)\lambda(1-\lambda)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda(1-\lambda)^{k-1}=\lambda(1-\lambda)\left[\sum_{k=2}^{\infty}(1-\lambda)^k\right]''+E(X)=$$

$$=\lambda(1-\lambda)\left(\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\right)''+1/\lambda=\lambda(1-\lambda)\frac{2}{\lambda^3}+1/\lambda=2(1-\lambda)/\lambda^2+1/\lambda=2/\lambda^2-1/\lambda$$

$$V(\mathrm{X})=2/\lambda^2-1/\lambda-1/\lambda^2=1/\lambda^2-1/\lambda=(1-\lambda)/\lambda^2$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (8)-Soluciones

1. Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes v.a.:
a) X con función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ [x]\dfrac{x}{8} & \text{si} \quad 1\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

Sol: Es mixta.

$$P(X=1)=1/8, P(X=2)=4/8-2/8=1/4, P(X=3)=1-6/8=1/4 \quad F'(\mathrm{x})=\begin{cases} 1/8 & 1<x<2 \\ 1/4 & 2<x<3 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\int_1^2 x/8dx+\int_2^3 x/4dx=\frac{11}{8}+\left[x^2/16\right]_1^2+\left[x^2/8\right]_2^3=\frac{11}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{9}{8}-\frac{1}{2}=\frac{35}{16}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{8}+1+\frac{9}{4}+\int_1^2 x^2/8dx+\int_2^3 x^2/4dx=\frac{126}{24}=\frac{21}{4} \quad V(X)=\frac{21}{4}-\left(\frac{35}{16}\right)^2=\frac{367}{768}$$

b) X con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{[x]}{3} & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sol: $E(X)=\int_1^2 x/3dx+\int_2^3 2x/3dx=\left[x^2/6\right]_1^2+\left[x^2/3\right]_2^3=4/6-1/6+3-4/3=13/6$

$$E(X^2)=\int_1^2 x^2/3dx+\int_2^3 2x^2/3dx=\left[x^3/9\right]_1^2+\left[2x^3/9\right]_2^3=5 \quad V(X)=5-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

2. Sea $Y:(R,B,P)\to(R,B)$ tal que $Y(x)=x^2$. Calcular la media de Y, estando dada la función de distribución asociada a P por

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2/4 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ (1/2)+(1/4)(x-1)^2 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Sol: Es mixta.

$$P(X=1)=1/2-1/4=1/4 \quad P(X=2)=1-(1/2+1/4)=1/4 \quad F'(x)=\begin{cases} x/2 & 0<x<1 \\ (x-1)/2 & 1<x<2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$E(Y)=E(X^2)=1^2 1/4+2^2 1/4+\int_0^1 x^2 x/2dx+\int_1^2 x^2(x-1)/2dx=5/4+\left[x^4/8\right]_0^1+\left[x^4/8-x^3/6\right]_1^2=$$
$$=5/4+1/8+16/8-8/6-1/8+1/6=13/4-7/6=25/12$$

3. La demanda X de un cierto producto, por unidad de tiempo, se distribuye con función de densidad $f(x)=e^{-x}$ si $x\geq 0$ y cero en otro caso. El aprovisionamiento del producto para satisfacer la demanda se hace al principio de cada unidad de tiempo considerada. La venta de una cantidad "x" produce una ganancia "ax", y el sobrante "y", que hay al principio de cada unidad de tiempo, procedente de la anterior, no es utilizable por lo que produce una pérdida "by". Hállese la cantidad conveniente de aprovisionamiento por unidad de tiempo, para que la ganancia esperada sea máxima.

Sol: La función de ganancia, sería:

$$G(Q,X)=\begin{cases} aQ & x\geq Q \\ ax-b(Q-x) & x<Q \end{cases}=\begin{cases} aQ & x\geq Q \\ (a+b)x-bQ & x<Q \end{cases}$$

$$E(G(Q,x))=\int_0^Q\left((a+b)x-bQ\right)e^{-x}dx+\int_Q^\infty aQe^{-x}dx=\left[-(a+b)xe^{-x}\right]_0^Q+(a+b)\int_0^Q e^{-x}dx-bQ\left[-e^{-x}\right]_0^Q+aQ\left[-e^{-x}\right]_Q^\infty=$$

$$=-(a+b)Qe^{-Q}+(a+b)(-e^{-Q}+1)-bQ(-e^{-Q}+1)+aQe^{-Q}=a+b-bQ+e^{-Q}(-aQ-bQ-a-b+bQ+aQ)=$$

$$=a+b-bQ-e^{-Q}(a+b)=(a+b)(1-e^{-Q})-bQ$$

$$\frac{\partial E(G(Q,\mathrm{x}))}{\partial Q}=-b+(a+b)e^{-Q}\Rightarrow b-(a+b)e^{-Q}=0\Rightarrow e^{-Q}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow Q=-\ln\frac{b}{a+b}$$

4. Sea

$$\varphi(t)=\frac{1}{2-e^{it}}$$

a) Comprobar que φ es la función característica de una v.a. discreta, X, y hallar la media y la varianza de X.

b) Hallar la función característica de $Y=1+2X$, así como su media y su varianza.

Sol:

a) $\varphi(t)=\dfrac{1}{2-e^{it}}=\dfrac{1/2}{1-e^{it}/2}=\displaystyle\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^j=\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^{j+1}}e^{itj}$. Comprobamos: $\displaystyle\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^{j+1}}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$

$E(\mathrm{X})=\varphi'(0)/i=\left[ie^{it}(2-e^{it})^{-2}\right]_{t=0}/i=1$

$E(\mathrm{X}^2)=\varphi''(0)/i^2=-\left[i^2e^{it}(2-e^{it})^{-2}+2i^2e^{2it}(2-e^{it})^{-3}\right]_{t=0}=3\quad V(X)=3-1=2$

b) $\varphi_{1+2X}(t)=e^{it}\varphi_X(2t)=\dfrac{e^{it}}{2-e^{2it}}\quad E(1+2X)=1+2E(X)=3\ \ V(1+2X)=4V(X)=8$

5. Estudiar si las siguientes funciones son funciones características de alguna v.a.

a) $\varphi(t)=\left(1-t^2\right)\lambda,\ \lambda\neq 0$

b) $\varphi(t)=e^{\lambda^2(e^{it}-1)},\ \lambda\neq 0$

Sol:

a) $\varphi(0)=(1-0)\lambda=\lambda=1,\ \varphi(-t)=1-t^2=\varphi(t)=\overline{\varphi(t)}$ pero $|\varphi(t)|=\left|1-t^2\right|\not\leq 1\ \forall t$, No es función característica

b) $\varphi(0)=e^{\lambda^2(1-1)}=1,\ \forall\lambda$.

$$\varphi(t)=e^{\lambda^2(e^{it}-1)}=e^{-\lambda^2}\sum_{x=0}^\infty\frac{\left[\lambda^2e^{it}\right]^x}{x!}=e^{-\lambda^2}\sum_{x=0}^\infty\frac{\left(\lambda^2\right)^x e^{itx}}{x!}=\sum_{x=0}^\infty\frac{\left(\lambda^2\right)^x e^{-\lambda^2}e^{itx}}{x!}$$

$\displaystyle\sum_{x=0}^\infty\frac{\left(\lambda^2\right)^x e^{-\lambda^2}}{x!}=e^{-\lambda^2}\sum_{x=0}^\infty\frac{\left(\lambda^2\right)^x}{x!}=e^{-\lambda^2}e^{\lambda^2}=1$. Es función de probabilidad

6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Determinar su función característica, así como los 3 primeros momentos respecto al origen

Sol:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{itx} \frac{1}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2(it+1)} - \frac{1}{2(it-1)} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\alpha_1 = \varphi'(0)/i = \frac{\left[-2t/(1+t^2)^2\right]_{t=0}}{i} = 0 = \alpha_3 \qquad \alpha_2 = \varphi''(0)/i^2 = -\left[-\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}\right]_{t=0} = 2$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (9-10)-Sol

1. En una especie animal, la probabilidad de que un hijo tenga sangre defectuosa es 0,6. El número de hijos en cada familia sigue una distribución de Poisson de parámetro λ=4. Calcular: a) La probabilidad de que una familia no tenga hijos sanos. b) El número esperado de hijos sanos.

Sol: X : número de hijos $\overset{d}{=} \wp(4) \quad P(\text{enfermo}) = 0,6$

a) $$P(0\ sanos) = \sum_{j=0}^{\infty} P(0 sanos / \ j\ hijos)\,\mathrm{P(j\ hijos)} = \sum_{j=0}^{\infty} 0,6^j \frac{4^j e^{-4}}{j!} = e^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2,4^j}{j!} = e^{-4} e^{2,4} = e^{-1,6}$$

b) Y : número de hijos sanos

$$y = 0,...\ P(Y = y) = \sum_{j=0}^{\infty} P(y\ sanos /\ j\ hijos) P(j\ hijos) = \sum_{j=y}^{\infty} \binom{j}{y} 0,4^y 0,6^{j-y} \frac{4^j e^{-4}}{j!} =$$

$$= 0,4^y e^{-4} \sum_{j=y}^{\infty} \frac{j!}{y!(j-y)!} 0,6^{j-y} \frac{4^j}{j!} = \frac{0,4^y e^{-4} 4^y}{y!} \sum_{j=y}^{\infty} \frac{\left(0,6 \cdot 4\right)^{j-y}}{(j-y)!} = \frac{0,4^y e^{-4} 4^y e^{2,4}}{y!} = \frac{1,6^y e^{-1,6}}{y!}$$

$$\Rightarrow Y \overset{d}{=} \wp(1,6) \Rightarrow E(Y) = 1,6$$

2. Una fábrica de plásticos produce accesorios para automóvil. Por estudios realizados en el proceso de fabricación se sabe que el porcentaje de unidades defectuosas producidas es del 4%. Las piezas son enviadas a un cliente en lotes de 100 piezas; éste inspecciona el lote y lo acepta si contiene menos de 6 piezas defectuosas. ¿Qué porcentaje de lotes rechazados debe esperar el fabricante, si el proceso de fabricación no ha sufrido modificaciones?.

Sol: X : número de piezas defectuosas $\overset{d}{=} B(100, 0,04)$

$$P(rechazar) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{j=0}^{5} \binom{100}{j} 0,04^j 0,96^{100-j} = 0,2116$$

$$Aproximando \quad \wp(4) \quad P(rechazar) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - \sum_{j=0}^{5} \frac{e^{-4} 4^j}{j!} = 0,215$$

3. El número de llamadas por minuto que recibe una centralita tiene distribución de Poisson, siendo el promedio de llamadas por hora de trescientas. Se pide:
a) Probabilidad de que quede rebasada en un minuto dado, si no puede establecer más de doce conexiones por minuto.
b) Probabilidad de que reciba una sola llamada en un minuto dado.
Sol:

a) X: número de llamadas por minuto $\overset{d}{=} \wp(5)$

$$P(rebasar) = P(X > 12) = 1 - \sum_{j=0}^{12} \frac{e^{-5} 5^j}{j!} = 0,00202$$

b) $$P(X = 1) = \frac{e^{-5} 5}{1} = 5e^{-5} = 0,0337$$

4. El número de vehículos que pasa por determinado punto en cierta carretera local poco transitada, en un determinado período de tiempo, sigue una distribución de Poisson de parámetro λ=6. Se conoce que la probabilidad de que un coche sobrepase el límite legal de velocidad al pasar por ese punto es 1/3. Determinar la probabilidad de que hubiesen pasado exactamente *k* vehículos por dicho punto, si se observaron *j* infracciones.

Sol: X: número de vehículos que pasan $\overset{d}{=}\wp(6)$ $\quad P(\text{pasarlimite})=1/3$

$$P(pasan\ i\,/\,j\,\text{limite})=\frac{P(j\text{ limite/ pasan i})\,\text{P(pasan i)}}{\sum_{k=0}^{\infty}P(j\text{ limite/ pasan }k)\,\text{P(pasan }k)}=\frac{\binom{i}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-j}\frac{e^{-6}6^{i}}{i!}}{\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-j}\frac{e^{-6}6^{k}}{\text{k}!}}=$$

$$=\frac{\frac{4^{i}}{2^{j}\,j!(i-j)!}}{\sum_{k=j}^{\infty}\frac{4^{k}}{2^{j}\,j!(j-\text{k})!}}=\frac{\frac{e^{-6}4^{i}}{(i-j)!}}{4^{j}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{e^{-6}4^{k-j}}{(\text{k}-j)!}}=e^{-4}\frac{4^{i-j}}{(i-j)!}\qquad i=j,\,j+1...$$

5. Sea $X\equiv U[0,1]$. Determinar un valor "a" tal que, tomando al azar cuatro valores de X, la probabilidad de que al menos uno de los cuatro supere el valor "a", sea al menos 0.99

Sol:

$$0,99=P(\max(\text{X}_1,...X_4)>a)=1-P(\max(\text{X}_1,...X_4)\le a)=1-P(\text{X}_1\le a)^4=1-a^4=0,99$$

$$\Rightarrow a^4=0,01\Rightarrow a=\sqrt{0,1}=0,31623$$

6. Las puntuaciones obtenidas mediante un test de aptitud se distribuyen según una $N(\mu=500,\ \sigma=100)$. ¿Qué tanto por ciento de alumnos alcanzarán puntuaciones que: a) excedan de 700 puntos; b) sean menores de 400; c) estén comprendidas entre 400 y 600; d) difieran en valor absoluto de 500 en más de 150?.

Sol:

a) $P(puntuación\ge 700)=P(Z\ge\frac{700-500}{100})=P(Z\ge 2)=0,0227$

b) $P(puntuación<400)=P(Z<\frac{400-500}{100})=P(Z<-1)=P(Z>1)=0,15865$

c) $P(400<puntuación<600)=P(\frac{400-500}{100}<Z<\frac{600-500}{100})=$

$=P(-1<Z<1)=1-2P(Z>1)=1-2\cdot 0,15865=0,6827$

d) $P(|puntuación-500|>150)=P(|Z|>\frac{150}{100})=P(|Z|>1,5)=2P(Z>1,5)=0,1336$

7. Sea X una v. a. con distribución normal verificando que $P\{X\le 15\}=0.1$ y $P\{X\le 20\}=0.95$. Se pide: a) $P\{X\le 13\}$, b) $P\{16\le X\le 17\}$, c) x tal que $P\{X\le x\}=0.05$, d) x tal que $P\{X>x\}=0.5$.

Sol.:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{15-\mu}{\sigma}=-1,28\\ \frac{20-\mu}{\sigma}=1,645\end{array}\right\}\Rightarrow\sigma=1,71\quad \mu=17,188$$

a) $P(X\le 13)=P\left(Z\le\frac{13-17,188}{1,71}\right)=P(Z\le -2,45)=P(Z\ge 2,45)=0,00714$

b) $P\left(16\leq X\leq 17\right)=P\left(\frac{16-17,188}{1,71}Z\leq\frac{17-17,188}{1,71}\right)=P\left(-0,695\leq Z\leq -0,11\right)=$

$=P\left(0,11\leq Z\leq 0,695\right)=P(Z\geq 0,11)-P(Z\geq 0,695)=0,2127$

c) $x/P(X<x)=0,05\Rightarrow P(\mathrm{Z}<\frac{x-17,188}{1,71})=0,05\Rightarrow P(\mathrm{Z}>\frac{-x+17,188}{1,71})=0,05$

$\Rightarrow\frac{-x+17,188}{1,71}=1,645\Rightarrow x=17,188-1,645\cdot 1,71=14,375$

d) $x/P(X>x)=0,05\Rightarrow x=\mu=17,188$

8. Una compañía de seguros pretende crear pólizas de seguros individuales contra un cierto tipo de accidentes. Una encuesta previa ha permitido estimar que, en un año, cada persona tiene una probabilidad de 1/5000 de ser víctima de un accidente cubierto por este tipo de póliza. Si la compañía vendiese diez mil pólizas de seguros de este tipo por año, determinar la probabilidad de que el número de accidentes no superase los tres por año (cifra por encima de la cual la operación no está considerada como rentable).

Sol:

X : número accidentes año $\overset{d}{=}B(10000,1/5000)$

$$P(X\leq 3)=\sum_{j=0}^{3}\binom{10000}{j}\frac{1}{5000^{j}}\left(\frac{4999}{5000}\right)^{10000-j}$$

Aproximando por una Poisson de párametro 2: $P(X\leq 3)\approx\sum_{j=0}^{3}\frac{e^{-2}2^{j}}{j!}=0,857$

9. El tiempo de vida (medido en meses) de un cierto tipo de bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro λ=1/12. Un vendedor que gana en cada bombilla 1euro se compromete a lo siguiente: a) si la bombilla se funde antes del cuarto mes, devuelve al comprador 0’60 euros.; b) si se funde en un instante x entre el cuarto y el sexto mes, devuelve al comprador (1’80–0’30x) euros¸ c) no devuelve ninguna cantidad si se estropea después del sexto mes. Se pide: *i)* Distribución de la ganancia obtenida por bombilla. *ii*) Ganancia media por bombilla. *iii*) Si vende 10 bombillas a un cliente, determinar la distribución del número que serán devueltas antes del primer mes.

i) La función de ganancia en función de T, tiempo de vida de la bombilla es:

$$G(T)=\begin{cases}0,4 & T<4\\ 0,3T-0,8 & 4<T<6\Rightarrow Mixta\\ 1 & T>6\end{cases}$$

$$F_G(y)=P(G\leq y)=\begin{cases}0 & y<0,4\\ \int_0^{\frac{y+0,8}{0,3}}e^{-t}dt & 0,4\leq y<1\\ 1 & y\geq 1\end{cases}==\begin{cases}0 & y<0,4\\ 1-e^{-\frac{y+0,8}{0,3}} & 0,4\leq y<1\\ 1 & y\geq 1\end{cases}$$

ii)

$$E(X) = 0,4P(T < 4) + \int_4^6 (0,3t - 0,8)e^{-t/12} / 12dt + 1P(T > 6) =$$
$$= 0,4(1 - e^{-4/12}) + 0,3\left[-te^{-t/12} - 12e^{-t/12}\right]_4^6 - 0,8(e^{-4/12} - e^{-6/12}) + e^{-6/12} =$$
$$= 0,4 - 0,4e^{-1/3} - 1,8e^{-1/2} - 3,6e^{-1/2} + 1,2e^{-1/3} + 3,6e^{-1/3} + 0,8e^{-1/2} - 0,8e^{-1/3} + e^{-1/2} =$$
$$= 0,4 + 3,6e^{-1/3} - 3,6e^{-1/2} = 0,796$$

iii) X : número de bombillas devueltas en primer mes $\stackrel{d}{=} B(10, P(T < 1))$

$X \stackrel{d}{=} B(10, 1 - e^{-1/12}) = B(10, 0'08)$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (15)- Soluciones

1. a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{indeptes}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

b) Falso. Contrajemplo:

$A_1 = \{1,2\} \quad A_2 = \{2,4,6\} \quad independientes: \quad P(A_1 \cap A_2) = P(\{2\}) = 1/6 = P(A_1)P(A_2)$

$B = \{1,4\} \quad B \subseteq A_1 \cup A_2$

$1/3 = P(B) \neq 1 - (1 - P(A_1 \cap B))(1 - P(A_1 \cap B)) = 1 - (1-1/6)(1-1/6) = 1 - 25/36 = 11/36$

2.
3.
4.

5. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \overset{*}{\leq} 1 - P(A \cap B) = P\left(\overline{A \cap B}\right) \quad (*) P(A \cup B) \geq P(A \cap B)$ La igualdad sólo se dará si $P(A \cup B) = P(A \cap B)$, es decir, si $A = B$ o difieren en un conjunto de probabilidad nula.

6. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x^2}{k} & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

a) $9/k \leq 1 \Rightarrow k \geq 9$

b) $E[X] = 1\frac{1}{k} + 3(1 - \frac{9}{k}) + \int_1^3 x \frac{2x}{k} dx = 3 - \frac{26}{k} + \frac{2}{k}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 3 - \frac{26}{k} + \frac{2}{k}\frac{26}{3} = 3 - \frac{26}{3k}$

c) $\varphi(t) = e^{it}\frac{1}{k} + e^{it3}(1 - \frac{9}{k}) + \int_1^3 e^{itx}\frac{2x}{k}dx = \frac{e^{it} - 9e^{it3}}{k} + e^{it3} + \frac{1}{k}\left\{\left[\frac{2xe^{itx}}{it}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{2e^{itx}}{it}dx\right\} =$

$= \frac{e^{it} - 9e^{it3}}{k} + e^{it3} + \frac{1}{k}\left\{\frac{6e^{it3} - 2e^{it}}{it} - \left[-\frac{2e^{itx}}{t^2}\right]_1^3\right\} = \frac{e^{it} - 9e^{it3}}{k} + e^{it3} + \frac{1}{k}\left\{\frac{6e^{it3} - 2e^{it}}{it} + \frac{2(e^{it3} - e^{it})}{t^2}\right\}$

d) $E[Y] = 15\frac{1}{k} + 20(1 - \frac{1}{k}) = 20 - \frac{5}{k}$

7.

a) i) $P(funcione) = P(ninguna\ \ falla) = P(no\ \ falla1 \cap no\ \ falla2 \cap no\ \ falla3) =$
$= P(no\ \ falla1) \cap P(no\ \ falla2) \cap P(no\ \ falla3) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.504$

ii) $P(funcione) = 1 - P(falle) = 1 - P(todas\ \ fallan) = 1 - P(falla1 \cap falla2 \cap falla3) =$
$= 1 - P(falla1) \cap P(falla2) \cap P(falla3) = 1 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 1 - 0.006 = 0.994$

iii) $P(funcione) = P(funcionan\ al\ menos 2) = P(funcionan) + P(no\ \ falla1 \cap no\ \ falla2 \cap\ falla3) +$
$+ P(no\ \ falla1 \cap\ falla2 \cap nofalla3) + P(falla1 \cap no\ \ falla2 \cap no\ \ falla3) =$
$= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.504 + 0.216 + 0.126 + 0.056 =$
$= 0.902$

b) $P(nofalla2 / \ falla\ sistema) = \dfrac{P(nofalla2 \cap falla\ sistema)}{P(falla\ sistema)} =$

$\dfrac{P(falla1 \cap nofalla2 \cap falla3)}{1-0.902} = \dfrac{0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3}{0.098} = \dfrac{0.024}{0.098} = 0.24489796$

8.

a) $1 = \int_0^1 \int_{1-x}^1 kxdydx = \int_0^1 kx(1-1+x)dx = \left[kx^3/3\right]_0^1 = k/3 = 1 \Rightarrow k = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} \int_{1-x}^1 3xdy = 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$

$f(y) = \begin{cases} \int_{1-y}^1 3xdx = 3/2 - 3(1-y)^2/2 = 3y - 3y^2/2 & 0 < y < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$

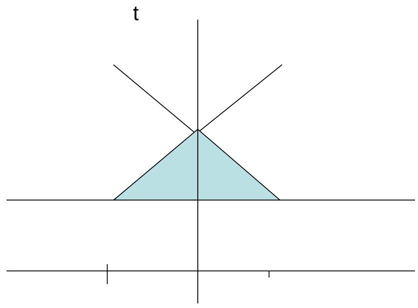
Obviamente, la conjunta no es el producto de las marginales.

c) $0 < x < 1 \quad f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{3x^2} & 1-x < y < 1 \\ 0 & resto \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 1-x < y < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$

$0 < x < 1 \quad E[Y/X] = \int_{1-x}^1 y/xdy = [1-(1-x)^2]/(2x) = (2x-x^2)/\left(2x\right) = 1 - x/2$

d) $\left. \begin{aligned} X &= \dfrac{Z+T}{2} \\ Y &= \dfrac{-Z+T}{2} \end{aligned} \right\} f(z,t) = 3\dfrac{z+t}{2}\dfrac{1}{2} I_R(z,t) = 3\dfrac{z+t}{4} I_R(z,t)$

$R: \begin{cases} x < 1 & z+t < 2 \\ y < 1 & t-z < 2 \\ x+y > 1 & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} t < 2-z \\ t < 2+z \\ t > 1 \end{cases}$



9. Según el TCL $\sum_{i=1}^{81} T_i \overset{d}{\simeq} N(81 \cdot 15, 81 \cdot 4^2)$, por lo que

$P(\sum_{i=1}^{81} T_i < 5 \cdot 4 \cdot 60) = P(\dfrac{\sum_{i=1}^{81} T_i - 81 \cdot 15}{\sqrt{81 \cdot 4^2}} < \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 60 - 81 \cdot 15}{\sqrt{81 \cdot 4^2}}) \approx P(Z < \dfrac{1200-1215}{36}) =$

$= P(Z < -0.41666) = 0,3384$

$0.9 = P(\sum_{i=1}^{81} T_i < 5 \cdot n \cdot 60) = P(\dfrac{\sum_{i=1}^{81} T_i - 81 \cdot 15}{\sqrt{81 \cdot 4^2}} < \dfrac{5 \cdot n \cdot 60 - 81 \cdot 15}{\sqrt{81 \cdot 4^2}}) \approx P(Z < \dfrac{300n-1215}{36}) =$

$\dfrac{300n-1215}{36} = 1.28 \Rightarrow n = \dfrac{1215 + 36 \cdot 1.28}{300} = 4,20$

10.

a) $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \le \sum_{i=1}^n P(A_i):$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup .... \cup (A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)\right) \overset{\substack{aditividad \\ disjuntos}}{=} \sum_{i=1}^n P\left(A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) \overset{monotonía}{\le} \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) : P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \overset{monotonía}{\geq} 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \overset{apartado\ a)}{\geq} 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

c) $P(A_1 / B) \geq 1 - \dfrac{P(A_1^c)}{P(B)}$:

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1^c \cup B^c)^c)}{P(B)} = \frac{1 - P(A_1^c \cup B^c)}{P(B)} = \frac{1 - P(B^c) - P(A_1^c) + P(A_1^c \cap B^c)}{P(B)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A_1^c)}{P(B)} + \frac{P(A_1^c \cap B^c)}{P(B)} \geq 1 - \frac{P(A_1^c)}{P(B)}$$

11.

a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \alpha x^2 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1/9 \Rightarrow E[X] = 1 \cdot \alpha + \int_1^3 2\alpha x^2 dx + 3(1 - 9\alpha) = -26\alpha + 3 + \left[\dfrac{2\alpha x^3}{3}\right]_1^3 =$

$= -26\alpha + 3 + 18\alpha - 2\alpha / 3 = 3 - 26\alpha / 3$

b)

$$0 \leq \alpha \leq 1/9 \Rightarrow E[X^2] = 1 \cdot \alpha + \int_1^3 2\alpha x^3 dx + 3^2(1 - 9\alpha) = -80\alpha + 9 + \left[\frac{\alpha x^4}{2}\right]_1^3 =$$

$$= -80\alpha + 9 + 81\alpha / 2 - \alpha / 2 = -80\alpha + 9 + 40\alpha = 9 - 40\alpha \Rightarrow$$

$$V[X] = 9 - 40\alpha - (3 - 26\alpha / 3)^2 = 9 - 40\alpha - 9 - 676\alpha^2 / 9 + 156\alpha / 3 = \alpha(12 - 676\alpha / 9)$$

c)

$$\varphi_X(t) = e^{it1}\alpha + e^{it3}(1 - 9\alpha) + \int_1^3 e^{itx} 2\alpha x dx = \alpha e^{it} + (1 - 9\alpha)e^{3it} + 2\alpha(\left[xe^{itx} / (it)\right]_1^3 - \left[e^{itx} / (it)^2\right]_1^3 =$$

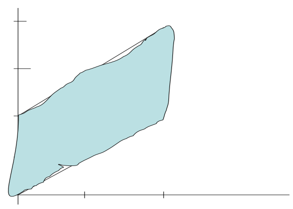
$$= \alpha e^{it} + (1 - 9\alpha)e^{3it} + 2\alpha(\frac{3e^{3it} - e^{it}}{it} + \frac{e^{3it} - e^{it}}{t^2})$$

12.

a)

$$1 = \int_0^2 \int_x^{x+2} kxydydx = \int_0^2 kx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+2} dx = \int_0^2 kx\left[\frac{x^2 + 4x + 4 - x^2}{2}\right]dx = \int_0^2 kx(2x + 2)dx =$$

$$= k\left[2x^3 / 3 + x^2\right]_0^2 = k(16/3 + 4) = k28/3 \Rightarrow k = 3/28$$



b) No lo son, basta ver el recinto

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^{x+2} kxydy = kx\left[\dfrac{y^2}{2}\right]_x^{x+2} = kx(2x + 2) = 3x(x + 1)/14 & 0 < x < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y kxydx = ky\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^y = ky\dfrac{y^2}{2} = 3y^3 / 56 & 0 < y < 2 \\ \int_{y-2}^2 kxydx = ky\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{y-2}^2 = ky(2 - \dfrac{(y-2)^2}{2}) = 3y^2(4 - y)/56 & 2 < y < 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

c) $0<x<2 \quad f_{Y/X}(y)=\dfrac{f(x,y)}{3x(x+1)/14}=\begin{cases}\dfrac{3xy/28}{3x(x+1)/14} & x<y<x+2\\ 0 & resto\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{y}{2(x+1)} & x<y<x+2\\ 0 & resto\end{cases}$

$$y=m_{Y/X=x}(x)=\int_x^{x+2} y\frac{y}{2(x+1)}dy=\frac{1}{2(x+1)}\left[y^3/3\right]_x^{x+2}=\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3}{6(x+1)}=\frac{3x^2+6x+4}{3(x+1)}$$

d)

$$\begin{cases}T=X\\ Z=Y-X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=T\\ Y=T+Z\end{cases}\quad J=\left\|\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}\right\|=1$$

Forma 1: $f_{T,Z}(t,z)=\begin{cases}3/28t(t+z)\cdot 1 & \begin{cases}t<t+z<t+2\\0<t<2\end{cases}\\ 0 & resto\end{cases}=f_{T,Z}(t,z)=\begin{cases}3t(t+z)/28 & 0<t<2, 0<z<2\\ 0 & resto\end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^2 3t(t+z)/28dt=\frac{1}{28}\left[t^3+3zt^2/2\right]_0^2=\frac{1}{28}[8+6z]=(4+3z)/14 & 0<z<2\\ 0 & resto\end{cases}$$

Forma 2:

$$F_Z(z)=P(Y-X\le z)=P(Y\le X+z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \int_0^2\int_x^{x+z} kxydydx=\int_0^2 kx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+z}dx=\int_0^2 kx\left[\frac{2zx+z^2}{2}\right]dx & 0\le z<2=\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & z<0\\ k\left[\frac{16z/3+2z^2}{2}\right]=z\frac{8+3z}{28} & 0\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}\qquad f_Z(z)=\begin{cases}\frac{8+6z}{28}=\frac{4+3z}{14} & 0<z<2\\ 0 & resto\end{cases}$$

13.

a) Verdadera

$$P(A/B)>P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(A\cap B)>P(A)P(B)\Rightarrow$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}>\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

b) Falsa $\left.\begin{matrix}A: par & P(A)=1/2\\ B:\ge 5 & P(B)=1/3\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-A:5\Rightarrow \begin{matrix}P(B-A)=1/6\\ P(B)-P(A)=1/3-1/2=-1/6\end{matrix}$

14. $F_X(x)=\begin{cases}e^x & x<-1\\ 1/2 & -1\le x<1\\ 1-e^{-x} & x\ge 1\end{cases}$

a) Mixta $P(X=-1)=1/2-1/e=P(X=1)\quad F'(x)=\begin{cases}e^x & x\le -1\\ e^{-x} & x\ge 1\\ 0 & resto\end{cases}$

$$E[X]=-1(1/2-1/e)+1(1/2-1/e)+\int_{-\infty}^{-1}xe^x dx+\int_1^{\infty}xe^{-x}dx=0$$

b) $$V[X]=E[X^2]-0^2=1(1/2-1/e)+1(1/2-1/e)+\int_{-\infty}^{-1}x^2e^xdx+\int_1^{\infty}x^2e^{-x}dx=1-2/e+2\int_1^{\infty}x^2e^{-x}dx=$$
$$=1-2/e+2\int_0^{\infty}\left(t+1\right)^2e^{-t-1}dt=1-2/e+\frac{2}{e}\int_0^{\infty}\left(t^2+2t+1\right)e^{-t}dt=1-2/e+\frac{2}{e}\left(\frac{2}{1}+2\frac{1}{1}+1\right)=1-8/e$$

c) $$\varphi(t)=e^{-it}(1/2-1/e)+e^{it}(1/2-1/e)+\int_{-\infty}^{-1}e^{itx}e^xdx+\int_1^{\infty}e^{itx}e^{-x}dx=$$
$$=2(1/2-1/e)\cos t+\left[\frac{e^{(it+1)x}}{it+1}\right]_{-\infty}^{-1}+\left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right]_1^{\infty}=(1-2/e)\cos t+\frac{e^{-it-1}}{it+1}-\frac{e^{it-1}}{it-1}=$$
$$=(1-2/e)\cos t+\frac{ite^{-it}-e^{-it}-ite^{it}-e^{it}}{-e\left(t^2+1\right)}=(1-2/e)\cos t+\frac{it(e^{it}-e^{-it})+(e^{-it}+e^{it})}{e\left(t^2+1\right)}=$$
$$=(1-2/e)\cos t+\frac{it(2isent)+(2\cos t)}{e\left(t^2+1\right)}=(1-2/e)\cos t+2\frac{\cos t-tsent}{e\left(t^2+1\right)}$$

d) $$F_Y(y)=P_Y(Y\le y)=P_X(3X+1\le y)=P_X(X\le\frac{y-1}{3})=\begin{cases}e^{\frac{y-1}{3}} & y<-2\\ 1/2 & -2\le y<4\\ 1-e^{-\frac{y-1}{3}} & y\ge 4\end{cases}$$

15.

a) P(esperar menos de 6 minutos)$=\dfrac{12}{30}$ $\qquad$ P(esperar más de 10 minutos)$=\dfrac{10}{30}$

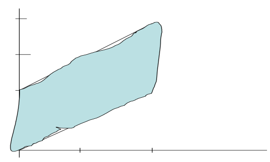
b) P(esperar más de 5 minutos/último tren hace más de 6)$=\dfrac{9/30}{18/30}=1/2$

c) $$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 2x/30 & 0\le x\le 10\\ 10/30+x/30 & 10\le x\le 20\\ 1 & x\ge 20\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x/15 & 0\le x\le 10\\ 1/3+x/30 & 10\le x\le 20\\ 1 & x\ge 20\end{cases}$$

d) $$f(x)=\begin{cases}1/15 & 0<x<10\\ 1/30 & 10<x<20\\ 0 & resto\end{cases}\Rightarrow E[X]=\int_0^{10}x/15dx+\int_{10}^{20}x/30dx=\frac{100}{30}+\frac{400-100}{60}=\frac{250}{30}=\frac{25}{3}$$

16. $f(x,y)=\dfrac{3xy}{28}$, $\quad$ si $0<x<2,\ x<y<x+2$

a) $$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{x+2}kxydy=kx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+2}=kx(2x+2)=3x(x+1)/14 & 0<x<2\\ 0 & resto\end{cases}$$



$$0<x<2\quad f_{Y/X}(y)=\frac{f(x,y)}{3x(x+1)/14}=\begin{cases}\frac{3xy/28}{3x(x+1)/14} & x<y<x+2\\ 0 & resto\end{cases}=\begin{cases}\frac{y}{2(x+1)} & x<y<x+2\\ 0 & resto\end{cases}$$

$$y=m_{Y/X=x}(x)=\int_x^{x+2}y\frac{y}{2(x+1)}dy=\frac{1}{2(x+1)}\left[y^3/3\right]_x^{x+2}=\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3}{6(x+1)}=\frac{3x^2+6x+4}{3(x+1)}$$

b) Forma 1:

$$\begin{cases} T = X \\ Z = Y - X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = T \\ Y = T + Z \end{cases} \quad J = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\| = 1$$

$$f_{T,Z}(t,z) = \begin{cases} 3/28t(t+z)\cdot 1 & \begin{cases} t < t+z < t+2 \\ 0 < t < 2 \end{cases} \\ 0 & resto \end{cases} = f_{T,Z}(t,z) = \begin{cases} 3t(t+z)/28 & 0 < t < 2, 0 < z < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^2 3t(t+z)/28dt = \frac{1}{28}\left[t^3 + 3zt^2/2\right]_0^2 = \frac{1}{28}\left[8+6z\right] = (4+3z)/14 & 0 < z < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Forma 2:

$$F_Z(z) = P(Y \le X + z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^2 \int_x^{x+z} kxydydx = \int_0^2 kx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+z} dx = \int_0^2 kx\left[\frac{2zx+z^2}{2}\right]dx & 0 \le z < 2 = \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ k\left[\frac{16z/3+2z^2}{2}\right] = z\,\frac{8+3z}{28} & 0 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{8+6z}{28} = \frac{4+3z}{14} & 0 < z < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

17. $F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ 1 - e^{-(x-n)} & x \ge n \end{cases} \to 0$ que no es función de distribución, por lo que no converge en Ley, y por tanto, tampoco en probabilidad ni casi seguro.