CURSO BÁSICO DE TEORÍA DE COLAS

Begoña Vitoriano

bvitoriano@mat.ucm.es

ÍNDICE

I Teoría de colas o líneas de espera

La teoría de colas o de líneas de espera estudia y analiza el comportamiento de un sistema donde existen unos *clientes* que demandan un *servicio*. Si bien los términos empleados (cliente, servicio) hacen pensar en sistemas en que tanto los clientes como los servidores son personas, hay que entender éstos en términos más amplios, de modo que un cliente puede ser una persona, un programa de ordenador, una máquina, etc. Igualmente, el servidor puede ser una persona, una máquina, un ordenador, etc.

Si directamente al ver la definición es fácil ver que existen muchos sistemas de la vida real que responden a ella, con esta nueva perspectiva la cantidad de sistemas es mucho mayor, estando incluidos los sistemas de telefonía y comunicaciones, sistemas informáticos, sistemas de producción, sistemas de tráfico, etc. En concreto, los sistemas de telefonía son los que han motivado mayor número de avances y resultados en este campo, siendo los originarios del desarrollo de esta disciplina.

I.1 Descripción de un sistema de colas

Los elementos que intervienen en un sistema de colas son, fundamentalmente, los siguientes:

- La *fuente* de clientes: es de donde surgen los clientes que solicitan el servicio
- La *cola* o *línea de espera*: es donde los clientes, una vez que han llegado a solicitar el servicio, aguardan para ser atendidos
- El *centro de servicio*: está formado por los servidores. Junto con la cola o línea de espera forman lo que se denomina *sistema*
- La *salida* de clientes: es el destino de los clientes una vez que han sido atendidos

Para describir un sistema de colas hay que describir cada uno de estos elementos, haciendo las distintas hipótesis sobre éstos que correspondan en cada caso. A continuación, se muestran algunas de las hipótesis que pueden hacerse de cada uno de los elementos. En general, un centro puede ser multiservicio, de modo que un cliente ha de pasar por varios servidores, sin embargo las hipótesis que se presentan a continuación deben hacerse para cada uno de los puntos de servicio.

- Sobre las llegadas:

a) *Una o varias fuentes*: los clientes pueden proceder de una o de varias fuentes diferentes. Es muy habitual que se tome como una sola fuente situaciones en las que claramente hay más y luego resulte inviable comprender y representar el comportamiento de las llegadas de los clientes. Así, por ejemplo, una tienda situada a la puerta de una salida de metro tendrá clientes que provienen de la calle y clientes que provienen del metro. Hacer la distinción es pertinente si se observa que los tiempos entre las llegadas de clientes responden, por ejemplo, a cortos periodos en que de pronto hay una gran afluencia (llegada de un tren) y periodos más largos en que las llegadas son esporádicas.

b) *Independencia entre llegadas*: los clientes pueden llegar de forma independiente o no, es decir, el tiempo entre las llegadas de dos clientes consecutivos puede ser independiente de los dos siguientes o no. Por ejemplo, si los clientes son autobuses que tienen un determinado orden de salida aunque la duración del recorrido sea variable, es claro que el tiempo entre llegadas a un punto no es independiente, ya que si pasa un tiempo anormalmente largo entre dos llegadas de autobuses puede ser porque el tráfico está muy mal y por tanto también será largo con el siguiente, o al revés, puede ser por alguna eventualidad y el siguiente sí mantendrá su horario, con lo que el tiempo siguiente entre llegadas será corto. La independencia entre llegadas suele ser una de las hipótesis más habituales, intentando en los casos en que no exista modelar o hacer otras hipótesis que permitan describir la dependencia en términos sencillos.

c) *Intervalos entre llegadas*: los tiempos entre llegadas pueden ser considerados de dos tipos, deterministas o aleatorios, y si se trata de estos últimos habrá que dar su distribución. Esto supone hacer un análisis previo de datos de tiempos entre llegadas para dar una distribución de estos tiempos, y, en muchos casos, un análisis de sensibilidad posterior para evaluar el impacto de una distribución u otra de estos tiempos.

Un valor importante en el análisis teórico de un sistema de colas es la *tasa de llegadas*, λ, que es el número medio de clientes que llegan al sistema por unidad de tiempo. También, a veces es definido como el número medio de clientes que acceden al sistema por unidad de tiempo. Aunque pueda parecer lo mismo, no lo es, ya que un cliente puede llegar a un sistema y no poder acceder a éste (por ejemplo, porque el sistema tenga una capacidad limitada), luego no serían los mismos los que llegan que los que acceden. En lo que sigue, λ será la tasa de llegadas y llamaremos λ_{EF} a la tasa de los que realmente acceden al sistema.

- Sobre la fuente:

a) Fuente *finita o infinita*: el tamaño de la fuente puede ser considerado infinito o un valor limitado, denominándose sistema abierto si es infinito y sistema cerrado si es finito. Un caso claro de fuente infinita es un sistema de producción en que se lanza la elaboración de un producto cada cierto tiempo sin ningún tipo de limitación. En otros casos, la fuente puede tener en la realidad un tamaño limitado (por ejemplo, los potenciales clientes son los habitantes de una ciudad), pero se considerará que es infinita siempre que el hecho de que un número de clientes esté en el sistema no afecte a la tasa con la que lleguen éstos, y finita cuando sí se vea afectada la tasa de llegadas por el número de clientes que ya hay en el sistema. Por ejemplo, habría que considerar fuente finita si tenemos un taller de reparación de máquinas para reparar ciertas máquinas de una planta industrial en la que hay siete de éstas. En tal caso, no llegarán igual al taller si no hay ninguna en reparación que si están todas (en cuyo caso no puede llegar ninguna), por lo que se hace necesario establecer como finita la fuente y tener en cuenta estas variaciones. El sistema en este caso se llama cerrado porque es importante indicar que los clientes una vez servidos vuelven a la fuente, mientras que en el caso de fuente infinita no se considera que el cliente vuelva a la fuente como una característica importante.

b) *Llegadas en bloque* (*batch*) *o unitarias*: los clientes pueden llegar de forma unitaria (aunque puedan coincidir dos llegadas) o en bloques de tamaño fijo o variable. Si las llegadas son en bloque es importante matizarlo, teniendo en cuenta que una variable aleatoria será el tiempo entre llegadas y otra distinta el tamaño del bloque, si es que éste es variable. Es claro, que la llegada en bloque no es equivalente a considerar las llegadas unitarias con tiempo 0 entre ellas si forman parte de un bloque, ya que haciendo esto estaríamos tratando con una variable mixta, cuando es mejor y más sencillo considerar dos variables aleatorias diferentes.

- Sobre el servicio:

a) *Uno o varios servidores*: ha de establecerse el número de servidores que hay en el sistema.

b) *Independencia entre servidores*: puede haber independencia en cómo atiende cada uno de los servidores o no, o incluso si varía la forma de trabajar de un servidor dependiendo del estado de los demás. Por ejemplo, si un servidor no puede ser utilizado en un momento dado, si hace que se modifique el ritmo de servicio de los demás.

c) *Independencia de los tiempos de servicio*: los tiempos de servicio en un mismo servidor pueden ser independientes o no. En general, se presupone la independencia entre éstos por no complicar excesivamente el modelo, aunque en muchos casos no sea una hipótesis realista. Por ejemplo, después de un servicio anormalmente largo, el servidor puede estar cansado y atender al siguiente cliente más despacio de lo habitual, o todo lo contrario, y querer despacharlo lo más rápidamente posible. Sin embargo, como se ha dicho, si sólo se plantea esta situación en casos esporádicos, es preferible no considerarlo en el modelo, siempre que el modelo final sea válido para el sistema que se pretende representar.

d) *Duración de los tiempos de servicio*: esta duración puede ser de tipo determinista si es conocida con seguridad, o de tipo aleatorio, en cuyo caso ha de establecerse una distribución para esos tiempos. De nuevo, como en el caso de tiempos entre llegadas, para establecer una distribución ha de hacerse un análisis previo de datos y es recomendable hacer un estudio de sensibilidad posterior.

También en este caso existe un valor especialmente importante de estas duraciones que es la *tasa de servicio,* μ. La tasa de servicio es el número medio de clientes que puede atender un servidor por unidad de tiempo. Obsérvese que es un dato de cada servidor y que no representa la tasa de servicio del sistema, que será una función de las tasas de los servidores individuales, aunque en algún caso pueda coincidir. A la tasa de servicio del sistema se le denotará por μ_{EF}.

e) *Homogeneidad de los servidores:* los servidores pueden ser homogéneos o no, es decir, pueden tener todos una misma tasa de servicio o tenerla diferente, pero, en cualquier caso hay que establecer cuál es la de cada uno de ellos, o por simplificación y dependiendo del modelo y los objetivos planteados, si se dispone de la tasa del sistema, aunque sean diferentes pueden ser considerados homogéneos con tasa la del sistema dividido por el número de servidores.

- Sobre el comportamiento de los clientes:

a) *Impaciencia*: la impaciencia en los clientes se entiende como la renuncia al servicio de un cliente que había acudido a solicitarlo. Esta renuncia puede ser antes de llegar a entrar en el sistema, es decir, a la vista del número de clientes en el sistema un cliente puede renunciar a entrar siendo considerado un cliente perdido, o puede ser después de un tiempo de espera. En este caso se incluye el caso en el que los clientes tienen un tiempo máximo de espera después del cual no pueden ser procesados (el procesamiento de productos perecederos o procesos en cadena que tienen un tiempo máximo para ser desarrollados, etc.)

- Sobre la cola

a) Número de canales en la cola: la cola puede estar formada por un único canal o por varios. Por ejemplo, en la caja de un banco con dos ventanillas puede establecerse una cola para cada ventanilla o una única cola para ambas. En principio, el segundo sistema es más eficiente en cuanto a tiempos, pero tiene de inconveniente que la longitud de la cola formada puede ser muy grande, lo que puede llevar a problemas de espacio (lo que se suele intentar resolver con cintas que establecen un camino serpenteante para aprovechar mejor el espacio disponible) y a impaciencia, es decir, renuncia de clientes antes de entrar al sistema, debido al impacto psicológico que supone ver una larga línea de espera (mayor que si se ven varias más pequeñas). En cualquier caso y dependiendo de los objetivos del modelo, ha de establecerse el funcionamiento que corresponda.

b) Interferencia de canales: en el caso en que haya varios canales en la cola, pueden producirse interferencias entre ellos, es decir, movimientos de clientes de un canal a otro. Una situación muy familiar es en los embotellamientos de tráfico, en los que cada carril es un canal y el cliente (conductor) siempre tiene la sensación de que el otro canal va más rápido, produciéndose cambios bastante a menudo (en ocasiones justificados, en otras no).

c) *Capacidad limitada*: el sistema puede tener una capacidad limitada o no. Se entiende por capacidad el número máximo de clientes que puede haber en el sistema, es decir, en servicio y en espera. Los clientes que llegan al sistema y no pueden acceder a él pueden presentar dos tipos de comportamiento. Pueden ser clientes perdidos ya que al no poder acceder al sistema renuncian al servicio (pueden renunciar del todo o buscarlo en otro centro) o pueden quedar en lo que se llama una órbita de reintentos, intentando obtener el servicio pasado un corto tiempo. Para comprender mejor lo que es una órbita de reintentos, una situación muy familiar es la siguiente: supóngase que se desea hacer una llamada telefónica pero no es posible por saturación de las líneas (suele salir un mensaje automático que dice que por saturación no es posible, que por favor se llame pasados unos minutos). Si se sigue lo que el mensaje dice cuando deseemos establecer la comunicación seremos como nuevos clientes, pero ¿quién no ha vuelto a intentarlo justo a continuación? En ese caso, pasamos a formar parte de la órbita de reintentos.

d) *Disciplina de la cola u orden de atención*: los clientes son seleccionados de la línea de espera mediante algún mecanismo, pudiendo ser el orden de selección alguno de los siguientes, que son los más habituales, o algún otro:

- FIFO (*fist in first out*): se selecciona el cliente que lleva más tiempo en la línea de espera. Responde a situaciones en que los clientes cuando llegan forman una fila ordenada situándose el último en llegar en último lugar.

- LIFO (*last in first out*): se selecciona el cliente que lleva menos tiempo en la línea de espera. Responde a situaciones en que los clientes forman una fila ordenada situándose el último en llegar en primer lugar para ser atendido. Un caso de este tipo es cuando se producen montones o pilas; por ejemplo, una secretaria procesa unos trabajos que tiene en un montón seleccionando siempre el que está encima y los trabajos se los dejan los empleados poniéndolos sobre el montón. Otro ejemplo podría ser un ascensor, en el que el último que entra en el ascensor es el primero en salir ya que está más cerca de la puerta.

- SIRO (*service in random order*): los clientes son seleccionados de forma aleatoria. Responde a situaciones en que los clientes no forman una línea ordenada, sino que se colocan de forma aleatoria. Por ejemplo, si los clientes son productos que se meten en un saco mientras están en espera.

- PRI (*priority*): los clientes tienen distinta prioridad y son seleccionados según ésta. A su vez la prioridad puede ser interruptora o no interruptora, es decir, cuando llega un cliente de prioridad mayor que el que está siendo servido, puede esperar a que acabe el servicio (prioridad no interruptora) o interrumpir el servicio que está en curso para que se atienda el suyo (prioridad interruptora). Suele darse esta política combinada con otra de tipo FIFO o similar, que se establezca para clientes con igual prioridad

- Cuánto: los clientes son seleccionados por la cantidad de servicio demandada, pudiendo ser ordenados de menor a mayor o viceversa. En ocasiones esta política se combina con alguna otra política, de modo que se clasifican los tipos de servicio y luego para los iguales se selecciona según otra estrategia.

- FIFO con límite: supone seleccionar según la estrategia FIFO pero con un límite de tiempo, de modo que superado éste si el servicio no ha terminado vuelve a la cola (al final) de modo que cuando vuelva a ser servido se reanudará en el punto en que se dejó. Esta estrategia es la que se usa en algunos servidores informáticos.

I.2 Medidas de eficiencia y leyes básicas en un sistema de colas

I.2.1 Variables y medidas de eficiencia fundamentales

Existen diversas variables que intervienen en un sistema de colas, así como diversas medidas que pueden darse para establecer y comparar la eficiencia de un sistema.

Los modelos teóricos de análisis de colas pretenden determinar la distribución de las variables que intervienen en el sistema y a partir de ellas obtener las medidas de eficiencia que son esperanzas, etc. de estas variables, mientras que los modelos de simulación pretenden medir directamente sobre el modelo las medidas de eficiencia planteadas.

De las variables que se plantean en un sistema de colas, hay una variable que es la fundamental, la que determina el comportamiento del sistema, es la variable número de clientes en el sistema.

Hay que entender que el número de clientes en el sistema es un proceso estocástico, $\{N_t\}_{t\in T}$, donde N_t es el número de clientes en el sistema en el instante t.

Este proceso puede ser o no estacionario para un sistema dado. Los modelos teóricos que se van a presentar se centran en el caso estacionario, considerando por lo tanto que la distribución es la misma para todas las variables del proceso, denominándose de forma genérica, sin que dependa del tiempo, N a la variable aleatoria número de clientes en el sistema, siendo su distribución la *distribución estacionaria*.

Los modelos teóricos se consideran resueltos una vez conocida la distribución estacionaria.

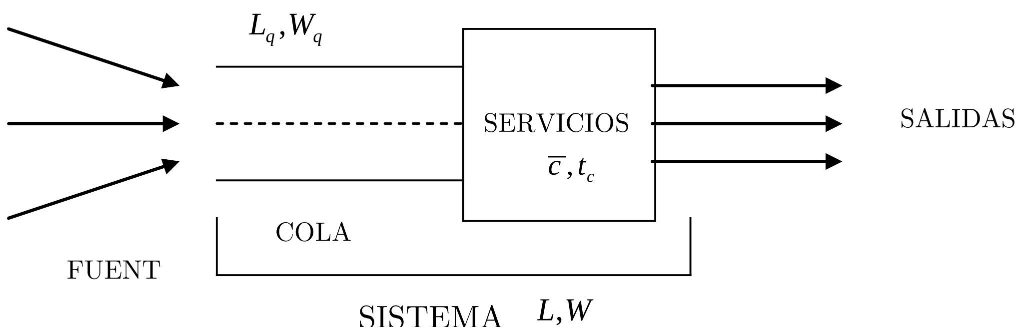
La medida de eficiencia de un sistema más habitual es la del número medio de clientes en el sistema, entre otras cosas porque cuando se plantean funciones de coste en un sistema, habitualmente, el coste asociado a los clientes y calidad de servicio suele ser una función de esta medida. Esta medida, en general, variará con el tiempo, sin embargo, si se considera el estado estacionario será constante, siendo el valor de la esperanza de la distribución estacionaria, es decir, si se denota por L, se tiene que $L = E[N]$.

Además de esta variable y esta medida existen otras de interés con sus medidas de eficiencia asociadas. En la siguiente tabla se recogen las principales variables y medidas de eficiencia en un sistema de colas.

Variables	**Medidas**

N : número clientes en el sistema	$L = E[N]$: nº medio de clientes en sistema
N_q : número clientes en la cola	$L_q = E\left[N_q\right]$: nº medio de clientes en la cola
T : tiempo de un cliente en sistema	$W = E[T]$: tpo. medio clientes en sistema
T_q: tiempo de un cliente en cola	$W_q = E\left[T_q\right]$: tpo. medio de clientes en cola
	$\overline{c}$: número medio de servidores ocupados
	t_c: tiempo medio de servidores desocupados

En el siguiente cuadro se muestra un esquema de un sistema de colas abierto con los elementos que intervienen y las medidas de eficiencia que éstos tienen asociadas.



Para que un sistema pueda alcanzar un estado estacionario, además de que los valores de entrada no dependan del tiempo, es decir, las distribuciones y tasas de llegada y servicio no varíen con el tiempo, ha de verificarse que el proceso no sea explosivo, es decir, que el número de clientes no tenga una tendencia creciente. Para ello, el sistema ha de tener capacidad para atender a los clientes que llegan, o lo que es igual la tasa de servicio del sistema ha de ser mayor que la tasa de entradas de clientes al sistema. Así, salvo en el caso determinista en que puede darse la igualdad, en sistemas cuyo tamaño no esté limitado, la condición para que exista distribución estacionaria será:

$$\rho = \frac{\lambda_{EF}}{\mu_{EF}} < 1$$

Este coeficiente, ρ, es denominado *factor de utilización o intensidad de tráfico*. También puede ser interpretado como el porcentaje de tiempo que un servidor está ocupado.

I.2.2 Relaciones entre las medidas de eficiencia

Suponiendo conocida la distribución estacionaria, donde p_n representa la probabilidad de que haya n clientes en el sistema en estado estacionario, de la propia definición se tiene que $L = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$ y $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n$, siendo c el número de servidores.

Por otra parte, para relacionar estas medidas con las de eficiencia referidas a tiempos en el sistema y en la cola, bajo ciertas condiciones muy generales de regularidad que en los modelos teóricos que veremos siempre se cumplen, se verifican las siguientes relaciones conocidas con el nombre de *Fórmulas de Little*:

$$L = \lambda_{EF} W$$
$$L_q = \lambda_{EF} W_q$$

Estas condiciones permiten obtener las medidas relacionadas con el tiempo sin requerir obtener las distribuciones de las variables aleatorias asociadas.

Otras relaciones que se tienen son entre medidas del sistema y medidas de la cola:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$
$$L = L_q + \frac{\lambda_{EF}}{\mu}$$

O también para obtener el número medio de servidores ocupados, la relación $\overline{c} = L - L_q = \frac{\lambda_{EF}}{\mu}$

.

Por último, hacer notar que en un sistema estacionario, la tasa de entrada de clientes al sistema es igual a la tasa de salida, aunque no tenga porqué ser la misma distribución. Este hecho es especialmente relevante en centros multiservicio, ya que ha de observarse que siempre que todos los clientes sigan el mismo camino dentro del centro, si el sistema es estacionario, la tasa con que llegan a cada uno de los puntos de servicio es la misma con la que llegan al sistema. Por ejemplo, en una cadena de producción, una vez alcanzado el estado estacionario, la tasa con la que llegan a cada punto es la que se haya establecido con el nivel de producción y, por lo tanto la producción final también. Si se decide empezar la fabricación de 8 productos simultáneamente cada 2 horas, la producción final una vez se tenga el estado estacionario, será de 4 productos por hora (aunque pueda ser que se obtengan 16 cada 4 horas, o 2 cada media hora, etc. pero, el nivel medio, la tasa, será de 4 por hora).

I.3 Fases del estudio de un fenómeno de colas

La teoría de colas como disciplina teórica es una teoría descriptiva perteneciente al campo de la probabilidad. Como tal lo que pretende es describir y explicar el funcionamiento de un sistema de colas. Dentro de la investigación operativa es una herramienta que se utiliza para mejorar y optimizar en algún sentido el funcionamiento del sistema. Así pues, para analizar y desarrollar un modelo de colas, las fases que intervienen son las propias de la metodología de la Investigación Operativa. A continuación se muestran estas fases haciendo hincapié en lo que es específico de la teoría de colas.

1. Desarrollo del modelo: consiste en hacer un modelo que sea una descripción correcta del sistema. En esta fase se incluye el análisis de datos con el correspondiente ajuste estadístico para obtener distribuciones para las variables de entrada, establecer el funcionamiento del centro de servicio incluyendo una descripción mediante un grafo o red si es un centro multiservicio, etc. Como todo modelo no es una representación exacta de la realidad, sino una simplificación, y cuánto más simple mejor, siempre que sea suficiente para los objetivos de estudio; por lo tanto, el desarrollo del modelo estará sujeto a una validación de éste, incluyendo análisis de sensibilidad sobre las hipótesis establecidas (distribuciones seleccionadas, etc.)

2. Obtención de las medidas de eficiencia: el modelo se desarrolla con un fin, el de mejorar la eficiencia del sistema, teniendo que establecerse en cada caso qué se entiende como eficiencia, es decir, cuál es el objetivo que se desea optimizar. Este objetivo será una función de las medidas de eficiencia contempladas en la sección anterior, que han de ser obtenidas del modelo. Para obtenerlas se pueden utilizar métodos analíticos si el modelo responde a alguno de los modelos teóricos que ya han sido estudiados en la literatura o desarrollando uno específico, o hacer un modelo de simulación del sistema para tomar medidas sobre él. En general, si existe el modelo teórico ya desarrollado es preferible utilizar este procedimiento, y en caso de que no exista acudir a la simulación. En este capítulo de teoría de colas lo que se verá son algunos de los modelos teóricos desarrollados hasta el momento.

3. Análisis de la mejora de la eficiencia del sistema o fase de optimización: en esta fase es donde se analizan las posibles estrategias de mejora del sistema que permiten variar algunos parámetros obteniendo distintos valores de la función de eficiencia establecida; en esta fase, es donde dependiendo de las opciones posibles puede requerirse un diseño previo de los experimentos a realizar (especialmente importante cuando se utilice la simulación para obtener las medidas de eficiencia.)

I.4 Notación de Kendall para los modelos teóricos de colas

Los modelos de colas teóricos que se han analizado de forma más clásica en la literatura podían ser clasificados con la siguiente notación establecida por Kendall. Es una notación en la que una cola es denominada cola *A/B/c/m/d*. Lo que representan cada uno de estos parámetros y sus posibles valores se recoge en la siguiente tabla, donde *M* quiere decir tiempos entre llegadas o de servicios exponenciales, *D* deterministas, E_k Erlang y *G* o *GI* general independiente, es decir, una distribución general:

A: Distribución tiempo entre llegadas	*M, D,* E_k, *GI*
B: Distribución tiempos de servicio	*M, D,* E_k, *G*
c: número de servidores	1,...,∞
m: capacidad del sistema	1,...,∞
d: disciplina de la cola	FIFO, LIFO, SIRO, PRI, ...

Obsérvese la limitación de este sistema de notación, ya que los únicos parámetros que pueden ser variados son los que aquí se contemplan, presuponiendo para el resto de los parámetros valores estándar: una única fuente de tamaño infinito, no hay impaciencia, hay independencia entre llegadas y servicios, etc. Si un modelo no se ajusta a estos parámetros entonces se sale de la notación de Kendall, y su resolución por métodos analíticos es bastante probable que no esté desarrollada.[1]

I.5 Métodos analíticos para obtener medidas de eficiencia

Los modelos teóricos más relevantes y mejor desarrollados son aquéllos en que las llegadas son deterministas o siguen un proceso de Poisson. En este capítulo sólo se van a mostrar modelos con esta última característica, empezando por lo tanto con una breve introducción sobre el proceso de Poisson.

I.5.1 El proceso de Poisson

Aunque muchos de los términos que se utilizan puedan ser comunes al lector, se van a recordar algunos de ellos para que no quepa ambigüedad.

Así, el proceso de Poisson es un tipo de proceso estocástico, donde un *proceso estocástico* es un conjunto de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Intuitivamente, un proceso estocástico es un conjunto de variables que están observando lo mismo pero en distinto momento o punto, de modo que el índice en que se mueven las variables suele ser de tiempo o espacio.

[1] Como se ha dicho, son los modelos clásicos los que se ajustan a la notación de Kendall, existen desarrollos posteriores para modelos que se salen de esta notación, incluso en este capítulo se verán algunos de ellos, como los sistemas cerrados.

En teoría de colas, el primer proceso que aparece es el de las llegadas, es decir, N_t sería el número de llegadas al sistema hasta el instante t, y utilizaremos este proceso para ilustrar los demás conceptos.

Por otra parte, el proceso de Poisson es un *proceso de conteo*, es decir, que toma valores naturales o el cero, y es no decreciente, es decir, una variable con índice mayor que el de otra no puede tomar un valor menor. Así, el proceso que cuenta el número de llegadas a un sistema hasta un determinado instante es un proceso de conteo, pues toma valores naturales y no puede decrecer, se mantiene o aumenta.

Además el proceso de Poisson es un *proceso markoviano*, lo que implica que los incrementos son estacionarios e independientes:

- *Incrementos estacionarios* quiere decir que la distribución de los incrementos (la diferencia entre dos variables del proceso, $N_t - N_s,\ \ s < t$) sólo depende del tamaño del incremento ($t - s$) y no de dónde esté situado; matemáticamente se expresa como $N_{t+h} - N_{s+h} \overset{d}{=} N_t - N_s$, $\forall s < t, \forall h > 0$. En el caso de las llegadas al sistema no siempre se cumplirá esta hipótesis, sólo lo hará si la distribución de los tiempos entre las llegadas se mantiene en todo el horizonte de estudio.
- *Incrementos independientes* quiere decir que la distribución de los incrementos es independiente, siempre que no se solapen los intervalos considerados, es decir, lo que haya ocurrido dentro de un intervalo de tiempo anterior no afecta a la distribución de lo que ocurra en un intervalo de tiempo posterior. También en este caso puede no cumplirse para las llegadas de clientes al sistema, tiene que haber independencia entre los tiempos de llegada para que se cumpla esta hipótesis.

Aclarados estos conceptos, un proceso estocástico $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un *Proceso de Poisson* de parámetro λ si y sólo si verifica las siguientes hipótesis:

1. $N(0) = 0$ c.s.
2. Tiene incrementos estacionarios
3. Tiene incrementos independientes
4. La distribución de los incrementos es una distribución de Poisson de parámetro λ por el tamaño del incremento: $N_t - N_s \overset{d}{=} \wp(\lambda(t-s))$. En consecuencia, de la primera propiedad, se tiene $\forall t > 0 \quad N(t) \overset{d}{=} \wp(\lambda t)$, es decir, $P(N(t) = n) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$.

Algunas propiedades del proceso de Poisson son las siguientes:

1. $P(N(t+h)-N(t)\geq 2)\xrightarrow[h\to 0]{}0$, lo que quiere decir, que la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos (llegadas) en un intervalo de tiempo tiende a cero cuando la amplitud del intervalo tiende a cero.

2. Sea $N(t):=$ número de sucesos que ocurren en el intervalo $(0,t]$.

   $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ si y sólo si los tiempos entre sucesos son variables aleatorias independientes con distribución $\exp(\lambda)$.

   De este modo, λ representa el número medio de sucesos (llegadas) que ocurren por unidad de tiempo y $1/\lambda$ es el tiempo medio entre dos sucesos consecutivos.

   Obsérvese además que la exponencial no tiene memoria, es decir, que aplicándolo a las llegadas, si éstas siguen una distribución de Poisson, quiere decir que si pasado un tiempo no ha habido ninguna llegada, la probabilidad de que se produzca una en el siguiente minuto es la misma que la de que se hubiera producido en el primer minuto después de que llegó el último cliente.

   Como esta hipótesis es muy plausible y razonable para llegadas de clientes que lo hacen aleatoria e independientemente, sin responder a consignas externas, es muy habitual que en fenómenos de colas la distribución de las llegadas pueda modelarse según un proceso de Poisson. Sin embargo, para algunas situaciones como por ejemplo cuando estas llegadas son máquinas a un taller de reparación en un sistema cerrado, esta hipótesis sólo tiene sentido cuando las razones de la reparación no son por desgaste.

I.5.2 Modelo general para modelos poissonianos

A continuación se presenta un modelo general para la distribución estacionaria de un sistema de colas en el que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial.

Así las hipótesis son las siguientes:

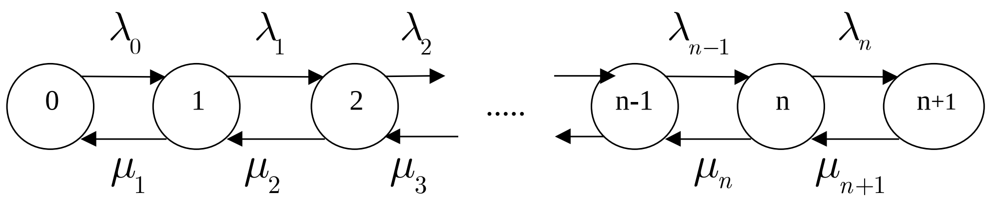
- Tiempos entre llegadas independientes y con distribución exponencial
- Tiempos de servicio independientes y con distribución exponencial
- λ_n: tasa de entradas al sistema suponiendo que hay n clientes en él
- μ_n: tasa de servicios del sistema suponiendo que hay n clientes en él

Obsérvese que este modelo se va a obtener admitiendo que las tasas de llegadas y servicios no sean constantes, sino que dependan del número de clientes que ya hay en el sistema.

El objetivo es obtener un modelo para la distribución estacionaria, es decir, una expresión para

- p_n : probabilidad estacionaria de que haya n clientes en el sistema.

Para obtener este modelo representemos primeramente el *diagrama de tasas de transición* entre estados. Para ello obsérvese que por tratarse de procesos de Poisson, se puede considerar que de cada estado sólo es posible pasar a dos estados, un cliente más o uno menos, ya que según la primera propiedad vista, en un intervalo de tiempo la probabilidad de que ocurran dos o más eventos de un mismo proceso tiende a cero cuando la amplitud del intervalo tiende a cero. Así pues el diagrama sería el siguiente:



Suponiendo que el sistema alcanza el estado estacionario entonces ha de cumplirse que para todos los estados la tasa esperada de llegadas a ese estado ha de ser igual a la tasa de salida esperada. Así pues, dado el estado $n > 0$ (el caso 0 es algo diferente), se tienen las siguientes tasas esperadas de llegada y salida:

Tasa esperada llegada al estado n : $\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$

Tasa esperada salida del estado n : $(\lambda_n + \mu_n)p_n$

Planteando la igualdad de tasas del estado estacionario, se tiene

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Para el caso $n = 0$, la ecuación resultante será $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$. Si en esta expresión despejamos p_1 en función de p_0, se tiene

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0$$

Por otra parte, siguiendo un proceso recursivo, se tendría

$$
\begin{aligned}
&n = 0 \rightarrow \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 && \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\
&n = 1 \rightarrow \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 && \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \\
&\vdots \qquad \cdots
\end{aligned}
$$

y mediante inducción, puede obtenerse de forma trivial la siguiente expresión en función de p_0 para la distribución estacionaria[2]:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_2 \mu_1} p_0$$

Por último, teniendo en cuenta que ha de ser una distribución de probabilidad y por lo tanto ha de verificar que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, puede determinarse el valor de p_0 y con ello el de todas las probabilidades de la distribución.

A continuación, se van a presentar los modelos más clásicos de teoría de colas, obteniendo la distribución estacionaria para cada uno de ellos a partir de este modelo general, excepto en un solo caso, el de la cola M/G/1, ya que al no ser exponencial la distribución de los tiempos de servicio no es válido este modelo.

I.5.3 Cola M/M/1

Según la notación de Kendall, las hipótesis de este modelo son las siguientes:

- Tiempos entre llegadas independientes y distribuidos según una exponencial de parámetro λ
- Tiempos de servicio independientes y distribuidos según una exponencial de parámetro μ
- Un único servidor ($c = 1$)
- Capacidad ilimitada ($k = \infty$), disciplina FIFO, valores por defecto al no ser especificados

Con la notación del modelo general, se tienen las siguientes tasas de entrada y salida: $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$.

[2] Obsérvese que hay n términos multiplicándose tanto en el numerador como en el denominador.

Definamos el factor de utilización $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Entonces, según el modelo general se tiene que , y dado que ha de ser una distribución de probabilidad, las probabilidades han de sumar 1:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$$

Esta serie sólo es convergente si se verifica que $\rho < 1$, de donde se obtiene la condición que ya se había planteado sobre el factor de utilización para la existencia de la distribución estacionaria.

Esa suma es $\frac{1}{1-\rho}$, de donde se tiene que $p_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$ y despejando se llega a que $p_0 = 1 - \rho$. Sustituyendo en la expresión de las demás probabilidades este valor, se obtiene la expresión general de la distribución

$$p_n = \rho^n (1-\rho)$$

A partir de esta distribución y de las relaciones vistas en la sección V.2.2, se obtienen las medidas de eficiencia en función de los datos del problema:

- Número medio de clientes en el sistema: $L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\rho}{1-\rho}$
- Número medio de clientes en la cola: $L_q = E\left[N_q\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Tiempo medio de un cliente en el sistema: $W = E[T] = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$
- Tiempo medio de un cliente en la cola: $W_q = E\left[T_q\right] = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
- Proporción de ocupación del servidor: $\overline{c} = L - L_q = \rho = 1 - p_0$
- Probabilidad de espera nula: $p_0 = 1 - \rho$

I.5.4 Cola M/M/1/k

Este modelo tiene las mismas hipótesis que el anterior, excepto la de capacidad, ya que se supone que hay una capacidad limitada del sistema, k, de modo que los clientes que no pueden acceder al sistema por estar éste completo se consideran *clientes perdidos*.

En este modelo siempre existe distribución estacionaria, ya que al ser un modelo de capacidad limitada no puede tratarse de un proceso explosivo.

Los datos a tener en cuenta en este modelo son los siguientes:

- λ: tasa de llegadas al sistema (no de entradas)
- μ: tasa de servicio
- k: capacidad del sistema

En este modelo también se define el coeficiente $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, pero obsérvese que este coeficiente en este caso no representa el factor de utilización del servidor (de hecho puede ser mayor que 1), ya que la tasa efectiva de entrada de clientes al sistema no es λ.

Para aplicar el modelo general basta observar que las tasas de entradas y de servicio son las siguientes:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < k \\ 0 & n \geq k' \end{cases} \qquad \mu_n = \mu \qquad \forall n$$

de donde se tiene que $p_n = \begin{cases} \rho^n p_0 & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$, y haciendo que la suma de todas sea 1, al tratarse de una suma finita, se tienen las siguientes expresiones, donde el caso $\rho = 1$ tiene su propia expresión particular:

$$(\rho \neq 1) \qquad p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}, \qquad p_n = \begin{cases} \rho^n p_0 & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$
$$(\rho = 1) \qquad p_n = \frac{1}{k+1} \qquad n = 0,1,\ldots,k$$

Respecto a las medidas relevantes de este sistema, hay dos que son particularmente importantes, que son la tasa efectiva de entrada de clientes y la tasa de clientes perdidos; la primera es relevante ya que es el valor que hay que utilizar para las fórmulas de Little, y la segunda porque en general toda función de coste que se plantee en un sistema de capacidad limitada en que pueda variarse la capacidad de éste será una función de este valor.

- Tasa efectiva de entrada de clientes al sistema: $\lambda_{EF} = \lambda(1 - p_k)$
- Tasa de clientes perdidos: $\lambda_{perdidos} = \lambda p_k$

Respecto a las demás medidas de eficiencia, el número medio de clientes en el sistema es mejor obtenerlo de la propia definición y las demás a partir de ese valor por las relaciones entre las medidas:

- $L = \sum_{n=1}^{k} n \rho^n p_0$
- $L_q = L - (1 - p_0)$
- $W = \dfrac{L}{\lambda_{EF}}$
- $W_q = W - \dfrac{1}{\mu}$

I.5.5 Cola M/G/1

En este modelo las hipótesis son las siguientes:

- Tiempos entre llegadas independientes y distribuidos según una exponencial de parámetro λ
- Tiempos de servicio independientes y distribuidos según una distribución general $F(\bullet)$, cuya media y varianza son, respectivamente, $E[S] = 1/\mu$ y $V(S) = \sigma^2$
- Un único servidor ($c = 1$)
- Capacidad ilimitada ($k = \infty$), disciplina FIFO

En este caso, el modelo general no es aplicable ya que los servicios no siguen un proceso de Poisson.

A continuación se muestra la fórmula de Pollaczek-Khintchine para el número medio de clientes en el sistema. Su deducción excede de los objetivos de este curso básico y por lo tanto no son mostrados. Así, usando la notación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, y suponiendo que se verifica la condición para que exista distribución estacionaria, $\rho < 1$, se tiene la siguiente expresión:

$$\text{Fórmula de Pollaczek-Khintchine: } L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)}$$

Las demás medidas de eficiencia se obtienen a partir de ésta por las relaciones entre ellas.

I.5.6 Sistema cerrado con un servidor (M/M/1)

Siguiendo con modelos de un único servidor, este modelo supone que el sistema es cerrado, es decir, que la fuente es finita. Como ya se comentó al hablar del tamaño de la fuente, se considera un modelo con fuente finita cuando el número de clientes en el sistema afecta o modifica la tasa con la que los clientes llegan al sistema. Un caso clásico para el uso de este tipo de modelos es el caso de una planta de producción en que hay un equipo de reparación de las máquinas de la planta o de parte de ellas.

Por lo tanto, la hipótesis básica es que la fuente es de tamaño finito, m, pero no es la única para poder aplicar el modelo general. Así las hipótesis del modelo son:

- Fuente finita de m unidades
- Los clientes una vez servidos vuelven a la fuente, siendo el tiempo de retorno al servicio una variable con distribución exponencial de parámetro λ. Es decir, el parámetro λ es la tasa de retorno o el número de servicios solicitados por unidad de tiempo de un individuo o unidad particular y, por lo tanto, no es la tasa de llegadas al sistema, sino sólo de llegadas de un individuo. Al no depender del individuo, se está suponiendo que los clientes son homogéneos. Para el ejemplo de las máquinas, supone que el tiempo que una máquina funciona tras una reparación hasta que se vuelve a estropear sigue una distribución exponencial (no hay desgaste), que una vez reparadas vuelven a funcionar igual (la tasa es constante) y que todas las máquinas siguen la misma distribución (no hay ninguna que requiera mayor número de reparaciones que otra).
- Los tiempos de servicio son independientes y siguen una distribución exponencial de parámetro μ.
- $c = 1$, un único servidor.

En este modelo va a existir siempre distribución estacionaria ya que el proceso no puede ser explosivo al ser la fuente finita y, por tanto, limitado el número de posibles clientes en el sistema.

Para aplicar el modelo general basta observar que las tasas de llegadas son $\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda & n < m \\ 0 & n \geq m \end{cases}$, y denotando $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, que no representa el factor de utilización, se tiene la siguiente expresión para la distribución estacionaria

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{m!}{(m-n)!}\rho^n p_0 = (m-n+1)\rho p_{n-1} && 0 < n \leq m \\ p_n &= 0 && n > m \end{aligned}$$

Para determinar el valor de p_0 se aplica que la suma de todas ha de ser 1, siendo la única expresión viable para ello $p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\,\rho^n}{(m-n)!}\right]^{-1}$.

A partir de esta distribución se pueden obtener las distintas medidas de eficiencia, teniendo en cuenta que para aplicar las fórmulas de Little, dado que las tasas de llegadas son $\lambda_n = (m-n)\lambda$, entonces la tasa media de llegadas será $\lambda_{EF} = (m-L)\lambda$:

- $L = m - \frac{1-p_0}{\rho}$
- $L_q = m - \frac{1+\rho}{\rho}(1-p_0)$
- $W_q = \frac{L_q}{(m-L)\lambda} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-p_0} - \frac{1+\rho}{\rho}\right]$
- $W = \frac{L}{(m-L)\lambda}$

I.5.7 Cola M/M/c

Éste es el primer modelo que se va a ver con más de un servidor. Las hipótesis que rigen el modelo son las siguientes:

- Tiempos entre llegadas independientes y distribuidos según una exponencial de parámetro λ
- Tiempos de servicio independientes y distribuidos según una exponencial de parámetro μ
- c servidores, homogéneos ya que la tasa de servicio es independiente del servidor
- Capacidad ilimitada ($k = \infty$), disciplina FIFO.

En este caso la tasa de entradas es constante $\lambda_n = \lambda$, siendo variable con el número de clientes en el sistema la tasa de servicio del sistema cuyo valor será $\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \le c \\ c\mu & n > c \end{cases}$.

Para que exista distribución estacionaria en el modelo ha de verificarse que el factor de utilización sea menor que 1, es decir, $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu} < 1$. Suponiendo que se cumple tal condición y aplicando el modelo general se tienen la siguiente expresión para la distribución estacionaria

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad 1 \le n \le c \;\} = \dfrac{c\rho}{n} p_{n-1} & 1 \le n \le c \\ \dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad n \ge c \;\} = \rho \cdot p_{n-1} & n \ge c \end{cases}$$

donde el valor de p_0 viene dado por la expresión $p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}}$.

Los valores de las medidas de eficiencia se derivan de esta distribución:

- $L = \dfrac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} p_0 + c\rho$
- $L_q = L - c\rho = \dfrac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} p_0$

I.5.8 Cola M/M/c/k

Las hipótesis son las mismas del caso anterior, pero con una capacidad del sistema limitada a k clientes.

En este modelo siempre existe distribución estacionaria, por ser limitado el número de clientes que pueden permanecer en el sistema.

Al igual que en el caso de un servidor usaremos la notación $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$, aunque no representa el factor de utilización ya que la tasa efectiva de entradas al sistema sería $\lambda_{EF} = \lambda(1 - p_k)$. Con esa notación y aplicando el modelo general se tiene

$$(\rho \ne 1) \qquad p_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & 1 \le n \le c \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}} p_0 & c \le n \le k \end{cases}$$

y p_0 se determina a partir de $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} p_n = 1$.

Los valores de la tasa efectiva de entradas y de la tasa de clientes perdidos, respectivamente, serán $\lambda_{EF} = \lambda(1-p_k)$ y $\lambda_{PERDIDOS} = \lambda p_k$.

Respecto al número medio de clientes en la cola, su expresión será distinta según el valor de ρ sea 1 o no:

$$(\rho \neq 1) \quad L_q = p_0 \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{k-c+1}-(k-c+1)(1-\rho)\rho^{k-c}\right]$$

$$(\rho = 1) \quad L_q = \frac{(c\rho)^c (k-c)(k-c+1)}{2c!} p_0$$

El resto de las medidas se obtienen a partir de ésta por las relaciones existentes entre ellas:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{EF}}; \quad W = W_q + 1/\mu; \quad L = W\lambda_{EF}$$

I.5.9 Sistema cerrado con c servidores (M/M/c)

Las hipótesis de este modelo son las mismas que las vistas para un sistema cerrado con un servidor, excepto en lo que al número de servidores se refiere. Por lo tanto éstas son:

- Fuente finita de m unidades
- Los clientes una vez servidos vuelven a la fuente, siendo el tiempo de retorno al servicio una variable con distribución exponencial de parámetro λ.
- Los tiempos de servicio son independientes y siguen una distribución exponencial de parámetro μ.
- c servidores homogéneos.

Las tasas de llegadas al sistema y de servicio en este caso son:

$$\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda & 0 \le n \le m \\ 0 & n > m \end{cases} \text{ y } \mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \le n \le c \\ c\mu & c \le n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

y aplicando el modelo general se tiene:

$$p_n = \begin{cases} \binom{m}{n}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & 1 \le n \le c \\ \binom{m}{n}\dfrac{n!(\lambda/\mu)^n}{c!\,c^{n-c}} p_0 & c \le n \le m \end{cases}$$

siendo p_0 obtenido a partir de la condición $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$.

Las medidas de eficiencia se obtienen a partir de L que a su vez se calcula mediante la definición ya que no tiene una expresión sencilla. Hay que tener en cuenta para aplicar las fórmulas de Little que la tasa media de llegadas al sistema será $\lambda_{EF} = E\left[(m-n)\lambda\right] = (m-L)\lambda$.

I.5.10 Dos casos particulares: Cola M/M/c/c y cola M/M/∞

Cola M/M/c/c

Este modelo supone que la capacidad del sistema es la misma que el número de servidores, es decir, no es posible hacer cola, por lo que en ocasiones no es identificado con un modelo de colas. Este modelo es el clásico de las centrales telefónicas, en que el número de servidores es el número de líneas del sistema.

En estos modelos existe un valor que es especialmente relevante, que es la probabilidad de que el sistema esté saturado, es decir, que haya c clientes en el sistema, identificado en las centrales de telefonía como la probabilidad de no tener línea, y cuyo valor, como se ha visto con anterioridad, es

$$p_c = \frac{(c\rho)^c / c!}{\sum_{i=0}^{c} (c\rho)^i / i!}$$

Cola M/M/∞

Se utiliza para modelar sistemas autoservicio o para aproximar el modelo M/M/c cuando c es muy grande. Por ejemplo, un sistema tipo autoservicio podría ser una ciudad a la que llegan turistas según una tasa diaria λ y permanecen por término medio en la ciudad $1/\mu$ días. Los clientes son los turistas, pero no hay un servidor al que piden un servicio, cada uno se lo da a sí mismo, no hay cola que hacer. Nuestro interés podría ser determinar el número medio de clientes que hay en la ciudad durante un día, es decir, L.

El proceso es estacionario siendo las tasas de llegadas y servicios $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n\mu$, respectivamente. Aplicando el modelo M/M/c, al hacer c tender a infinito, se tiene la siguiente expresión para la distribución estacionaria $p_n = e^{-\lambda/\mu} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad n = 0,1,\ldots$, que corresponde a una distribución de Poisson de parámetro λ/μ, es decir, $N \overset{d}{=} \wp(\lambda/\mu)$.

A partir de aquí se tienen las medidas de eficiencia, donde todas las referidas a la cola, obviamente, son cero:

$$L = \lambda/\mu; \quad L_q = 0; \quad W = 1/\mu; \quad W_q = 0$$

I.6 Modelos de decisión en colas: modelos de coste

Dentro de la investigación operativa, cuando se hace un estudio de colas es porque se desea mejorar en algún sentido el funcionamiento del sistema, es decir, existe un proceso de optimización de alguna función, normalmente una función de coste, mediante la variación de algún parámetro controlable del sistema.

En general, un problema de estas características se puede plantear como determinar el nivel de servicio que minimiza el coste total del sistema.

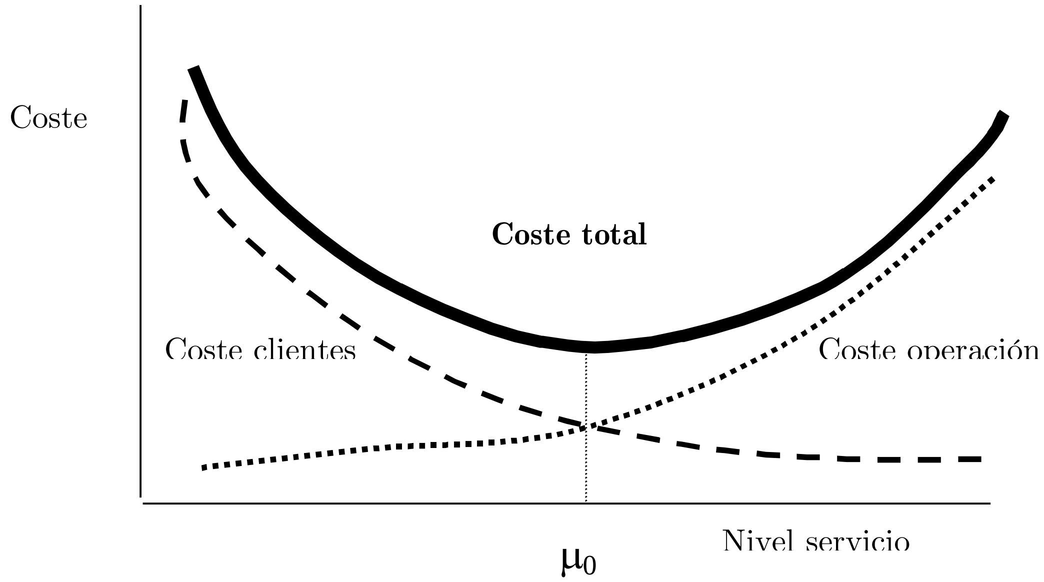
Ahora bien, la función de coste total es una suma de costes conflictivos, ya que ha de incluir tanto los costes de operación del servicio como el coste de los clientes. Si el coste de los clientes no es internalizado por el servidor la solución sería sencilla, ofrecer el menor nivel de servicio que será el más barato.

La internalización del coste de los clientes puede ser por un valor objetivo o subjetivo. Un valor objetivo, por ejemplo, si se está optimizando la capacidad del sistema podría ser la pérdida de beneficio de los clientes perdidos. O, por ejemplo, si el sistema es un taller de reparación de máquinas en una planta de producción se puede estimar la pérdida de productividad por tener una máquina no operativa durante un tiempo. En otros casos, no es tan claro y ha de hacerse una estimación subjetiva del coste de los clientes, como es el caso de una ventanilla de un banco en que hay que valorar de algún modo el tiempo de permanencia de un cliente en el banco. Esta valoración, en general, dependerá de quién la haga, de modo que no es la misma la del cliente que la del banco y no es la misma si no hay competencia que si la hay.

Una vez hecha esa valoración, como ya se ha dicho, la función de coste es la suma de unos costes conflictivos, ya que al aumentar la calidad de servicio aumenta el coste de operación de éste pero disminuye el de los clientes:

Coste total = Coste operación servicio + coste clientes (servicio + espera)

Gráficamente, sería una representación similar a la siguiente, donde se pretende determinar el nivel de servicio μ_0:



Cada problema, cada situación, es diferente, con su propia función de coste y sus propias alternativas. Una de las fases previas a decidir el modelo es determinar cuál es ese objetivo y qué opciones hay para optimizarlo.

A continuación, se muestran algunas situaciones clásicas de optimización en colas, pero desde luego no son las únicas, son incluidas aquí a modo de ejemplo.

a) Optimización tasa de servicio (μ)

Supóngase una situación en que la tasa de servicio es la variable de decisión. Un caso de este tipo puede darse si el servidor es un ordenador (sería la velocidad del servidor) o es una máquina en un proceso de producción, ...

Suponemos como datos conocidos los siguientes:

- C_1 : coste de cada unidad de tasa de servicio y por unidad de tiempo.

  Con lo que el coste por tener una tasa μ sería $C_1\mu$

- C_2: coste por cada unidad de tiempo que pasa un cliente en el sistema. Con lo que el coste total del tiempo perdido de los clientes sería $C_2 L(\mu)$ [3]. Este coste suele ser más difícil de ver, pero, obsérvese que si el número medio de clientes en el sistema es 3, quiere decir que cada hora se pierden 3 horas de los clientes. También puede verse en función de W, de modo que si cada cliente permanece en media en el sistema W horas y por hora llegan λ clientes, las horas perdidas de los clientes son λW, que por las fórmulas de Little, es precisamente, L.

Con estos datos la función de coste por unidad de tiempo es

$$CT(\mu) = C_1\mu + C_2 L(\mu)$$

A modo de ejemplo, si la cola fuera M/M/1, el problema sería

$$\min_{\mu} C_1\mu + C_2 L = C_1\mu + C_2\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Derivando e igualando a cero, se tiene $C_1 - C_2\dfrac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = 0$, y de aquí se llega a $(\mu-\lambda)^2 = \lambda C_2 / C_1$ y dado que para que exista distribución estacionaria ha de verificarse $\mu > \lambda$, el valor óptimo para la tasa de servicio será $\mu = \lambda + \sqrt{\lambda C_2 / C_1}$.

b) Optimización de la tasa de servicio (μ) *y la capacidad sistema* (k)

A los datos anteriores y función de coste anterior habría que añadirle ahora el coste por la capacidad del sistema, siendo los datos requeridos:

- C_3: Coste por unidad de capacidad y por unidad de tiempo.

  Siendo el coste por unidad de tiempo por tener una capacidad k, $C_3 k$

- C_4: Coste por cada cliente perdido (puede ser pérdida de beneficio).

  Así el coste por los clientes perdidos por unidad de tiempo será $C_4 \lambda p_k$

[3] Se ha denotado a L por $L(\mu)$ para dejar patente que el valor de L es una función de la tasa de servicio μ, que es la variable del problema.

De este modo, el objetivo del problema será

$$\min_{\mu,k} CT(\mu,k) = C_1\mu + C_2 L(\mu,k) + C_3 k + C_4 \lambda p_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

c) *Optimización del número de servidores* (c)

En este caso, interviene un nuevo coste, el del servidor, además del de los clientes:

- C_5 : Coste por servidor por unidad de tiempo. El coste por unidad de tiempo será $C_5 c$
- C_2 : coste por cada unidad de tiempo que pasa un cliente en el sistema. Con lo que el coste total del tiempo perdido de los clientes será $C_2 L(c)$

El problema que se plantea en este caso será

$$\min_{c} CT(c) = C_5 c + C_2 L(c) \qquad c \in \mathbb{N}$$

I.7 Enunciados de la biblioteca de problemas

PROBLEMA 1

La ventanilla de un banco realiza las transacciones en un tiempo medio de 2 minutos. Los clientes llegan con una tasa media de 20 clientes a la hora. Si se supone que las llegadas siguen un proceso de Poisson y el tiempo de servicio es exponencial. Determinar:

a) Porcentaje de tiempo ocioso del cajero.

b) Tiempo medio de estancia de los clientes en la cola.

c) Fracción de clientes que deben esperar en cola.

PROBLEMA 2

Una tienda de alimentación es atendida por una persona. Aparentemente, el patrón de llegadas de clientes durante los sábados se comporta siguiendo un proceso de Poisson con una tasa de llegada de 10 personas por hora. A los clientes se les atiende siguiendo un orden tipo FIFO y debido al prestigio de la tienda, una vez que llegan están dispuestos a esperar el servicio. Se estima que el tiempo que se tarda en atender a un cliente se distribuye exponencialmente, con un tiempo medio de 4 minutos. Determinar:

a) La probabilidad de que haya línea de espera.

b) La longitud media de la línea de espera.

c) El tiempo medio que un cliente permanece en cola.

PROBLEMA 3

Los clientes llegan a una peluquería con una tasa media de 5 por hora y con los tiempos entre llegadas consecutivas distribuidos exponencialmente. Hay un peluquero disponible en todo momento y 4 sillas para los clientes que llegan cuando el peluquero está ocupado. El reglamento del local de prevención de incendios limita el número total de clientes dentro de la tienda, en todo momento, a un máximo de 5. A los clientes que llegan cuando la peluquería está llena se les niega la entrada. El tiempo de servicio se distribuye exponencialmente con media que cambia según el número de clientes. Determinar:

a) Número medio de clientes en la cola.

b) Tiempo estimado que un cliente espera su servicio.

c) Porcentaje de tiempo que el peluquero permanece ocioso.

Número de clientes en la tienda	1	2	3	4	5
Tiempo medio de atención por cliente (min.)	9	10	10	13	20

PROBLEMA 4

En una fábrica existe una oficina de la Seguridad Social a la que los obreros tienen acceso durante las horas de trabajo. El jefe de personal, que ha observado la afluencia de obreros a la ventanilla, ha solicitado que se haga un estudio relativo al funcionamiento de este servicio. Se designa a un especialista para que determine el tiempo medio de espera de los obreros en la cola y la duración media de la conversación que cada uno mantiene con el empleado de la ventanilla. Este analista llega a la conclusión de que durante la primera y la última media hora de la jornada la afluencia es muy reducida y fluctuante, pero que durante las siete horas del resto de la jornada el fenómeno se puede considerar estacionario. Del análisis de 100 periodos de 5 minutos, sucesivos o no, pero situados en la fase estacionaria, se dedujo que el número medio de obreros que acudían a la ventanilla era de 1.25 por periodo y que el tiempo entre llegadas seguía una distribución exponencial. Un estudio similar sobre la duración de las conversaciones, llevó a la conclusión de que se distribuían exponencialmente con duración media de 3.33 minutos. Determinar:

a) Número medio de obreros en cola.

b) Tiempo medio de espera en cola.

c) Compárese el tiempo perdido por los obreros con el tiempo perdido por el oficinista; hallar el coste para la empresa, si una hora del oficinista vale 250 u.m. y una hora del obrero 400 u.m. ¿Sería rentable poner otra ventanilla?

PROBLEMA 5

Supongamos que en la flota de Iberia hay 4 aviones del tipo Jumbo 747. Se ha venido observando el comportamiento de estos aviones desde 1971 y, en especial, los fallos en las turbinas. Los datos indican que los fallos en cualquier turbina de cualquier avión es una variable aleatoria con distribución exponencial y que el tiempo promedio entre dos fallos consecutivos de cualquier avión es de un año. El tiempo medio de revisión y arreglo del fallo de la turbina es de 45 días (una octava parte del año) y sigue una distribución exponencial. Solamente se tiene un equipo humano de expertos para dar servicio y se proporciona servicio bajo la política de “primero que entra en taller, primero que se repara”. Durante el periodo de mantenimiento el avión no vuela. Describir cuantitativamente el sistema de espera.

PROBLEMA 6

Una entidad bancaria considera la posibilidad de instalar una red de cajeros en una de sus oficinas. Dado que se desconoce la afluencia de público que demanda dicho servicio, coloca un único cajero durante un mes. Diariamente se recogen datos sobre los tiempos de llegadas de los clientes, así como de los tiempos de servicio. Suponiendo que la sucursal se encuentra emplazada en un barrio donde no existe otro servicio semejante, el cliente que llega prefiere esperar a poder utilizar el cajero, cuando esté ocupado.

Tras el oportuno análisis de los datos recogidos, se estima que:

1. el cuadro de llegadas es un proceso de Poisson
2. la distribución del tiempo de servicio es exponencial
3. el tiempo medio transcurrido entre dos llegadas consecutivas es de 7.5 minutos
4. el tiempo medio de servicio es de 5 minutos por cliente

Se pide calcular:

a) Tiempo medio de espera que debe sufrir cada cliente en cola.

b) Número medio de clientes en la cola.

c) Tamaño medio de la cola cuando no está vacía y probabilidad de que al acudir al cajero ya haya alguna persona en la cola.

PROBLEMA 7

En un taller caben cuatro máquinas que son reparadas por dos mecánicos. Las máquinas llegan al taller una vez cada tres horas por término medio y el tiempo medio de reparación es de 45 minutos. Suponiendo que se trata con distribuciones exponenciales de los tiempos, ¿cuál es el número medio de máquinas estropeadas en el taller en estado estacionario?

PROBLEMA 8

Una sucursal bancaria tiene dos cajeros igualmente eficientes y capaces de atender un promedio de 60 operaciones por hora, con los tiempos reales de servicio distribuidos exponencialmente. Los clientes llegan al banco siguiendo un proceso de Poisson con una tasa media de 100 por hora. Determínese:

a) La probabilidad de que haya más de tres clientes simultáneamente en el banco.

b) La probabilidad de que al menos uno de los cajeros esté ocioso.

PROBLEMA 9

Un autoservicio de lavado de coches tiene cuatro secciones. En cada una, los clientes pueden lavar y encerar sus autos. Por otro lado, se tiene espacio para un máximo de tres automóviles adicionales cuando las secciones de lavado están ocupadas. Los clientes llegan al servicio siguiendo un proceso de Poisson con una tasa media de 15 por hora. Si no hay espacio para que esperen en terrenos del servicio de lavado, los clientes que llegan deberán irse. Aparentemente el tiempo necesario para dar servicio a un automóvil se distribuye exponencialmente, con una media de 12 minutos. Determínese:

a) El número medio de automóviles en el servicio en cualquier momento.

b) Número medio de automóviles por hora que no pueden entrar al servicio por estar éste completo.

PROBLEMA 10

En un cruce fronterizo entre los países A y B, la línea de tráfico de B a A se bifurca en cinco puestos de inspección migratoria y aduanera. Supóngase que las llegadas de coches tienen una distribución de Poisson con 15 llegadas por hora, mientras que el número de servicios tiene una distribución exponencial con 8 servicios por hora.

Por decreto gubernamental, no existe prioridad de trato (¿es creíble?), así que los puestos migratorios y aduaneros proporcionan servicio a medida que se desocupan, atendiendo a los coches por riguroso orden de llegada a la cola.

Comprobar si $\lambda < \mu$, y en caso afirmativo, interpretar dicha desigualdad. Se pide además:

a) Calcular p_0, L, L_q, W_q, W, especificando su significado.

b) Estudiar si sería razonable suprimir tres puestos fronterizos de cara al turismo.

PROBLEMA 11

Los trabajadores de una fábrica tienen que llevar su trabajo al departamento de control de calidad antes de que el producto llegue al final del proceso de producción. Hay un gran número de empleados y las llegadas son aproximadamente de 20 por hora, siguiendo un proceso de Poisson. El tiempo para inspeccionar una pieza sigue una distribución exponencial de media 4 minutos. Calcular el número medio de trabajadores en el control de calidad si hay: a) 2 inspectores, b) 3 inspectores.

PROBLEMA 12

Considérese una cola con un único servidor y llegadas de Poisson con 10 llegadas por hora por término medio. Normalmente, el servidor trabaja de acuerdo a una distribución exponencial con una media de tiempo de servicio de 5 minutos. La dirección tiene un curso de preparación que da como resultado una mejora (decrecimiento) en la varianza del tiempo de servicio a costa de un ligero incremento en la media. Después de finalizar un estudio, se estima que el tiempo medio de servicio se incrementará en 0.5 minutos y la desviación típica decrecerá de 5 minutos a 4 minutos.

a) A la dirección le gustaría saber si debe seguir con el empleado o con uno que tenga el cursillo. Razonar los resultados.

b) Calcular la reducción de la varianza necesaria para contrarrestar un incremento de 0.5 en la media.

PROBLEMA 13

El fabricante de un conductor eléctrico muy especializado tiene un gran volumen de producción. El conductor sufre una única manipulación mecánica mediante una máquina especializada. Dado el volumen de ventas, la Compañía pone un gran número de máquinas iguales funcionando todo el tiempo (supongamos que la población de máquinas es infinita). Las máquinas se averían de acuerdo con un proceso de Poisson con una media de 5 por hora. La Compañía tiene un único técnico de reparación y las características de la máquina son tales que las averías son debidas a dos únicas posibles causas. Dependiendo de cual de las dos averías se produzca, se tarda en reparar 9 o 12 minutos.

Como el empleado es un experto y las máquinas son idénticas, las posibles variaciones en los tiempos de reparación son minúsculas y pueden ignorarse. El tipo de causa que produce la avería se reparte aleatoriamente, pero se observa que un tercio de las averías necesitan 12 minutos para repararse. Calcular el número esperado de máquinas averiadas.

PROBLEMA 14

Un avión tarda, casi exactamente, 4 minutos en aterrizar a partir del momento en que la torre de control le da la señal de aterrizaje. Si las llegadas de los aviones se producen por término medio, a razón de 8 por hora y siguiendo un proceso de Poisson, ¿cuánto puede esperar el piloto que va a tener que volar alrededor del aeropuerto antes de recibir la señal de tierra?

PROBLEMA 15

En la unidad de urgencias de un hospital los casos de emergencia llegan según una distribución de Poisson con una media de un caso cada 5 horas. Antes de que se produzca cualquier operación quirúrgica u otra intervención cada paciente debe someterse a un examen médico y a la diagnosis de su dolencia, este proceso dura 15 minutos (de forma casi exacta). Calcular (suponiendo el sistema en estado estacionario):

a) El número medio esperado de enfermos que aún no han sido operados.

b) El tiempo que por término medio pasa un enfermo antes de entrar en quirófano.

c) El tiempo medio que un paciente debe esperar hasta ser examinado.

d) El número esperado de pacientes que esperan para ser examinados.

PROBLEMA 16

Una compañía de ordenadores posee un ordenador central al que pueden acceder los clientes a través de unos terminales (de distintos tipos) que se alquilan. Un cliente desea determinar la velocidad óptima del terminal que debería alquilar. Los trabajos del cliente se generan según un proceso de Poisson con una tasa de 50 programas por día de 8 horas. El tamaño medio de un programa es de 1000 sentencias. Se sabe que el tiempo de lectura de sentencias es exponencial. El cliente estima en 10 unidades monetarias el coste de retrasar un programa un día.

La compañía estima que una velocidad de 100 sentencias por minuto y cualquier aumento semejante, incrementa el precio del alquiler mensual del terminal en 100 unidades monetarias. Determinar la velocidad óptima del terminal.

PROBLEMA 17

Se considera un taller de reparaciones que desea contratar a uno de dos posibles mecánicos. El primer mecánico cobra a razón de 3 u.m. por hora y puede reparar a razón de 5 máquinas por hora. El segundo reparador cobra 5 u.m. por hora, pero puede reparar a razón de 8 máquinas por hora. Ambos salarios se pagan con independencia de que los trabajadores estén ocupados u ociosos. Los clientes estiman que una máquina averiada les representa un coste de 8 u.m. por hora y el taller lo asume como coste por unidad de tiempo de espera por cliente. Se supone que las máquinas llegan al taller según un proceso de Poisson de parámetro 4 por hora y que el tiempo de reparación sigue una distribución exponencial. ¿Qué trabajador resulta más económico para la empresa?

PROBLEMA 18

Una compañía que tiene cuatro máquinas que se estropean frecuentemente, emplea a una persona con la única tarea de repararlas. El tiempo necesario para cada reparación tiene una distribución exponencial con media de 2 horas. Una vez que una máquina ha quedado reparada, el tiempo que transcurre hasta que vuelve a fallar tiene una distribución exponencial con media de 10 horas. Cuando una máquina queda en reparación, el tiempo perdido tiene un valor de 20 u.m. por hora y el servicio del mecánico cuesta 45 u.m. diarias. Se supone un día de 8 horas laborables.

a) Calcular la distribución estacionaria.

b) Calcular el número medio de máquinas operativas en estado estacionario

c) ¿Cuál es el coste esperado del tiempo perdido por día?

d) ¿Sería deseable tener dos mecánicos para que cada uno atendiera sólo dos máquinas?

e) ¿Sería deseable tener dos mecánicos para que atendieran las cuatro máquinas?

PROBLEMA 19

Una pequeña compañía que fabrica dispositivos para computadoras tiene 10 máquinas para esta tarea. Estas máquinas se estropean con frecuencia pero sólo se cuenta con 8 operadores para manejarlas, de modo que dos de ellas quedan en reserva para usarse cuando alguna de las activas se estropea. Por tanto, siempre que no haya más de dos máquinas en espera de reparación habrá ocho en uso.

Se ha comprobado que el tiempo que transcurre hasta que una máquina en funcionamiento falla corresponde aproximadamente a una exponencial de media 20 días. El tiempo que se necesita para reparar una máquina se distribuye también como una exponencial de media 2 días.

Hasta ahora la fábrica sólo ha tenido un mecánico que reparaba las máquinas estropeadas con el consiguiente descenso de la producción cuando había menos de 8 máquinas en funcionamiento. Por tanto se plantea la posibilidad de contratar a otro mecánico a fin de que se puedan reparar dos máquinas al mismo tiempo.

Cada mecánico cuesta 70 u.m./día, pero la pérdida de ganancias estimadas por la reducción de la productividad por cada una de las ocho máquinas que no funcionen son 100 u.m./día.

PROBLEMA 20

Una compañía ferroviaria pinta sus propios vagones, según se vayan necesitando, en sus propios talleres donde se pinta a mano de uno en uno con una velocidad que se distribuye según una exponencial de media uno cada 4 horas y un coste anual de 4 millones de u.m. Se ha determinado que los vagones pueden llegar según un proceso de Poisson de media uno cada 5 horas. Además el coste por cada vagón que no está activo es 500 u.m./hora.

Se plantean otras dos posibilidades. Una es encargar dicho trabajo a una empresa de pintura que lo haría con aerosol con el consiguiente ahorro de tiempo. Sin embargo el presupuesto para esta segunda alternativa es de 10 millones de u.m. anuales. En este caso el proceso se aproxima a uno de Poisson con una tasa de uno cada 3 horas.

La otra opción es poner otro taller exactamente igual al que hay actualmente, con igual tasa de servicio y coste anual que permita pintar dos vagones a la vez.

En todos los casos el trabajo se considera ininterrumpido, esto es, se trabajan 8760 horas anuales. ¿Cuál de los tres procedimientos es preferible?

PROBLEMA 21

Una empresa de reparación de radios recibe una media de 10 solicitudes de reparación al día, que se distribuyen según un proceso de Poisson. Suponga que μ es la velocidad de reparación de la máquina reparadora en radios/día, y el tiempo de reparación exponencial. Cada unidad de velocidad de reparación supone un coste de 100 € por semana.

Además se ha estimado que el coste de tener radios no reparadas supone 200 € por radio y semana, siendo este coste proporcional al tiempo. Suponiendo que una semana tiene cinco días laborables, se pide:

a) Determinar la velocidad de reparación óptima.

b) Determinar si sería más económico tener dos máquinas, cada una con la mitad de la velocidad determinada en el apartado anterior.

PROBLEMA 22

Un dentista tiene una consulta a la que llegan los pacientes a razón de 5 por hora según un proceso de Poisson. La sala de espera dispone de tres sillas y no se admiten pacientes si no hay sillas disponibles. El tiempo medio que tarda el dentista con cada paciente se distribuye de forma exponencial, pero su media varía según el número de pacientes que haya en la consulta:

Número de pacientes en la consulta:	1	2	3	4
Tiempo medio de servicio (minutos):	9	10	12	15

Dar las probabilidades estacionarias del número de clientes en la consulta.

PROBLEMA 23

El departamento de contabilidad de una empresa tiene un sistema informático con varios ordenadores en un mismo dominio, un ordenador que actúa como servidor de impresión (que procesa los trabajos por riguroso orden de llegada sin que sean establecidas prioridades en los trabajos) y dos impresoras iguales (con un buffer en principio “ilimitado”). Los miembros del departamento han elevado una solicitud (queja) a la Dirección para que sea mejorado este servicio de impresión, aduciendo que las máquinas al final de mes (instante de cierre contable) están sobresaturadas.

Tras realizar las observaciones oportunas en esta época de final de mes y analizar los datos obtenidos llega a las siguientes conclusiones:

- El tiempo que pasa entre órdenes de impresión que llegan al servidor se distribuye según una exponencial de media 5 minutos.
- El tiempo que el servidor tarda en procesar la tarea solicitada sigue una distribución exponencial de media 1 minuto.
- El tiempo de impresión sigue una distribución exponencial de media 7.5 minutos.

Se pide responder a los siguientes apartados:

1. Si se alcanza el estado estacionario, ¿cuál sería la tasa de llegadas de trabajos a las impresoras?
2. Prescindamos ahora del ordenador que hace de servidor. ¿Tiene el sistema distribución estacionaria? ¿por qué?
3. Seguimos sin el servidor. ¿Cuál será el número medio de trabajos pendientes de impresión al final del día?
4. En las mismas condiciones del apartado anterior, si se quedan haciendo horas extras hasta que han acabado las impresoras (sin mandar más trabajos), ¿cuántas horas extras cabe esperar que habría que pagar?
5. En las mismas condiciones del apartado anterior, si mientras un trabajo está en el subsistema de impresión, el empleado estuviera inactivo y por lo tanto se considera que es tiempo perdido y la hora de un empleado cuesta 20 €, ¿qué coste por hora tiene este sistema?
6. En las mismas condiciones, si se considera un coste añadido a un trabajo el coste por espera en impresión como el coste de ese tiempo inactivo de un empleado, ¿qué coste habrá que añadir a cada trabajo cuando se quiera facturar éste a un cliente, si en media cada trabajo para ser acabado requiere pasar 10 veces por la impresora?

PROBLEMA 24

Se considera un taller de reparaciones con un robot. Se considera la posibilidad de sustituir éste por otro robot. Ambos robots son diferentes, con diferentes costes. En la siguiente tabla se recogen los datos de cada uno de los robots, entendiéndose por costes operativos los costes por unidad de tiempo que el robot está realizando alguna reparación y por costes de amortización costes por unidad de tiempo, esté reparando o no el robot.

	Costes amortización (€/h)	Costes operativos (€/h)

Robot 1	100	200
Robot 2	150	400

El primer robot puede reparar a razón de 6 máquinas por hora y el segundo puede reparar a razón de 7 máquinas por hora.

Cuando una máquina se encuentra en el taller de reparación se considera un coste por unidad de tiempo por pérdida de productividad estimado en 80 €/h y el taller lo asume como coste por unidad de tiempo y por cliente. Se supone que las máquinas llegan al taller según un proceso de Poisson de parámetro 5 máquinas por hora y que el tiempo de reparación con que reparan los robots sigue una distribución exponencial.

Decidir analíticamente cuál de los dos robots es preferible comparando el coste por hora con ambos robots, y dar ese coste.

PROBLEMA 25

Juan Pérez está estudiando la posibilidad de abrir un taller de lavado de coches. Con este fin ha recibido una oferta para adquirir un solar al precio de 750 €/m^2. Por su experiencia en este tipo de negocios sabe que necesitará una superficie de 30 m^2 para la instalación de la máquina lavadora y, además, 12 m^2 por cada vehículo que quiera admitir en el taller y que tenga que hacer cola para ser lavado. Los coches que no encuentran sitio en el interior del taller se verán obligados a acudir a otro centro de servicio.

Por otro lado y por el conocimiento que tiene de otro taller del mismo tipo, que tuvo en la misma zona así como por un pequeño estudio estadístico, ha obtenido que los tiempos transcurridos entre dos llegadas consecutivas se distribuye según una distribución exponencial de media 10 minutos.

Se pide:

1. Si el tiempo que se tarda en lavar un turismo se distribuye según una exponencial de media 6 minutos, y el precio de lavar un turismo es de 4 €, determinar el espacio adicional que debe poner para optimizar el diseño del taller para un periodo de funcionamiento de un año (365x12x60=262800 min), suponiendo un estado estacionario.
2. Supóngase que no hubiera limitación de espacio, de modo que no hace falta poner espacio de reserva pues pueden esperar a la puerta del taller cuántos vehículos quieran, pero se estima en 0.5 € cada minuto que pasa un vehículo en el taller o esperando para acceder a él. Juan Pérez puede adquirir una máquina lenta que tarda exactamente 6 minutos en lavar un turismo y cuesta 36000 € o una rápida que cuesta 60000 € pero sólo invierte 4 minutos en lavar un turismo. Además los vehículos que solicitan el servicio pueden ser dos tipos: turismos y camiones. El tiempo que se tarda en lavar un camión es el doble que el requerido por los turismos, y el porcentaje de turismos es del 65 %.

¿Qué cola media se formará en la calle con cada una de las máquinas? ¿Qué máquina debería adquirir pensando en un funcionamiento de un mes (262800 min)?

PROBLEMA 26

Sea una planta de producción con dos puestos, A y B. Los productos tienen que pasar todos por ambos puestos, pasando primero por A y luego por B. El proceso en el puesto A en media es de 3 minutos y en el puesto B de 4 minutos.

Se pide:

1. ¿Cuál es la máxima producción que se puede lograr por hora en la planta? Si los productos llegan con un tiempo entre ellos distribuido según una exponencial de media 5 minutos, ¿cuál será la producción por hora suponiendo un estado estacionario?
2. Si además de ser exponenciales los tiempos entre llegadas (de media 5 minutos como en el apartado anterior), son exponenciales los tiempos de servicio, ¿cuál será el tiempo estimado desde que llega un producto a la planta hasta que llega a la cola del puesto B? ¿Y si los tiempos de servicio fueran deterministas y no exponenciales?
3. Suponiendo que el tiempo entre llegadas fuera exponencial (de media 5 minutos como en el apartado anterior), pero los productos son de dos tipos, de modo que en el puesto A el 20 % tarda en ser procesado 3 minutos y el resto tarda 4 minutos y se estima en 0.2 € cada minuto que un producto pasa en el sistema, ¿qué coste del coste total por hora en que incurre la empresa sería atribuible al puesto A? ¿qué coste atribuible al puesto A habría que cargar a cada producto?

PROBLEMA 27

Al comienzo de año, un fabricante de juguetes se enfrenta a la planificación de la producción del tercer trimestre. Desde el punto de vista del negocio el tercer trimestre ha sido bueno el 75 % de los años, entendiéndose por un trimestre bueno aquél en el que la demanda media diaria es de 12 unidades, y por regular, circunstancia que se da en el 25 % restante, cuando dicha demanda media diaria es de 8 unidades durante todo el trimestre. En ambos casos las demandas diarias son aleatorias, independientes y distribuidas según leyes poissonianas.

Históricamente se sabe también que cuando el segundo trimestre ha sido bueno el tercero lo ha sido en el 80 % de los casos, mientras que si el segundo trimestre ha sido regular el tercero ha sido bueno tan sólo en el 30 % de las ocasiones.

La construcción de un juguete requiere el uso de dos máquinas A y B, de las que el artesano dispone de una unidad de cada una. El proceso en la máquina A consiste en el ensamblaje de 6 componentes idénticas y la máquina tarda en ejecutar la operación un tiempo aleatorio gobernado por una ley exponencial de media 30 minutos. El proceso en la máquina B, realizado a continuación de la A, consiste en el ensamblaje de 9 componentes idénticas (aunque de otro tipo de las ensambladas en A) y el tiempo de proceso sigue otra ley exponencial de media 48 minutos.

El juguetero quiere atender todos los pedidos, para lo cual, y si es necesario, alquila máquinas adicionales de uno u otro tipo. Obsérvese que si el tercer trimestre es bueno tiene que contratar una máquina adicional de tipo B para poder satisfacer la demanda, ya que se establece una jornada laboral diaria de ocho horas. El coste de este alquiler para el tercer trimestre para una máquina de tipo B es el siguiente:

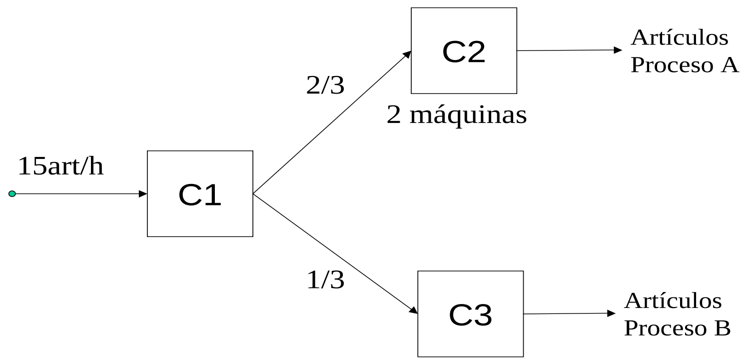
- si la máquina se contrata a comienzo de año el coste es de 1200 €,
- si se contrata antes de fin de junio (ya se sabe si el segundo trimestre ha sido bueno o regular) 1500 €, y
- si se contrata una vez comenzado el tercero y ya se dispone de datos sobre si el tercer trimestre es bueno o regular, 2000 €.

1. ¿Cuál es la política óptima del juguetero en cuanto al posible alquiler de máquinas se refiere?
2. ¿Cuál es el tiempo medio que tarda un juguete en ser enviado a su solicitante desde que éste lo pide hasta que es procesado por ambas máquinas si el trimestre es regular y se dispone de una máquina? ¿Y si es bueno?

Nota: Si las llegadas son poissonianas y los servicios también, la salida sigue también un proceso de Poisson.

PROBLEMA 28

A un taller llegan para su procesamiento artículos según una ley poissoniana con media de 15 unidades por hora. Los artículos pueden sufrir dos procesos distintos, A y B, siendo la demanda tal que 2/3 de los procesos son de tipo A. La secuencia de procesos se muestra en la figura, en la que puede verse que en el puesto C2 de las piezas de tipo A hay dos máquinas.



El proceso en el puesto C1 es el mismo para los dos procesos y sigue una ley exponencial de media 3 minutos. En el puesto C2 el tiempo de proceso es una ley exponencial de media 10 minutos y en C3 el tiempo de proceso es una ley normal de media 7.5 minutos y desviación típica 2 minutos.

a) Estimar el tiempo que tarda un artículo siguiendo el proceso A y el tiempo de un artículo siguiendo el B, desde que llega hasta que ha sido procesado completamente[4].

b) Si se estima en 0.1 € cada minuto que pasa un artículo en el sistema, ¿qué coste horario tendrá el sistema? ¿qué coste se debería imputar a cada uno de los artículos por este proceso?

PROBLEMA 29

Un empresario quiere instalar un taller de reparación de motos en una zona de veraneo desde el 15 de junio al 15 de septiembre. El local que alquila tiene capacidad para 4 motos, ya sean en fase de reparación o esperando ser reparadas, de forma que todo motorista que, al llegar al taller, lo encuentre ocupado se marcha en busca de otro taller.

Desde el 15 de junio al 15 de julio la llegada de motos averiadas al taller sigue una ley poissoniana con una media de 12 motos diarias. A partir del 16 de julio, esta media puede subir a 24 motos con una probabilidad de 0.75 o reducirse a 6 con una probabilidad de 0.25.

La reparación de una moto supone un tiempo aleatorio regido por una ley exponencial de 2 horas de media. El taller funciona las 24 horas del día en tres turnos seguidos de 8 horas cada uno.

En relación con el número de mecánicos a contratar para las reparaciones, el empresario tiene las siguientes opciones:

1. Contratar a 15 de junio, y para toda la temporada, a un grupo de tres mecánicos (uno para cada turno), con un coste de empresa mensual de 15000 €, o a dos grupos de tres mecánicos (dos para cada turno), con un coste de empresa mensual de 30000 €.
2. Contratar a 15 de junio, y para toda la temporada, a un grupo de tres mecánicos, con un coste de empresa mensual de 15000 €. Para los dos últimos meses de la temporada, pero firmando el contrato a 16 de julio, antes de conocer la evolución de la llegada de motos averiadas, puede contratar a un segundo equipo de tres mecánicos que costará cada mes 25000 €.

Si cada moto deja unos ingresos medios de 65 € y utilizando el criterio de valor medio, ¿qué política de contratación se debe aconsejar al empresario? Se suponen meses de 30 días.

¿Cuánto podría llegar a pagar el empresario por conocer antes del 15 de julio el promedio de motos averiadas hasta el final de la temporada?

[4] Tener en cuenta que en un sistema de colas si las llegadas siguen un proceso de Poisson y los tiempos de servicio son exponenciales, entonces las salidas también siguen un proceso de Poisson.

PROBLEMA 30

Un taller, especializado en la reparación de una cierta pieza, tiene un mecánico y capacidad para dos vehículos. Si llega un tercer vehículo, es enviado a un pequeño taller anexo, con capacidad para un solo vehículo, donde otro mecánico procede a la reparación. Cuando el mecánico de este segundo taller acaba la reparación vuelve a sus ocupaciones habituales y retorna cuando nuevamente un vehículo sea enviado al taller anexo. También si el mecánico del primer taller acaba la reparación que está haciendo pasa a hacerse cargo de la reparación del vehículo en el que está trabajando el segundo mecánico, que vuelve a sus ocupaciones habituales. Los vehículos que no pueden ser reparados en ninguno de los dos talleres abandonan el sistema.

Los vehículos llegan de acuerdo con una ley poissoniana de intensidad λ vehículos/hora. Los tiempos de reparación de ambos mecánicos son exponenciales y las respectivas tasas de reparación son υ_1 y υ_2 vehículos/hora.

a) ¿Cuál es la variable de estado de este sistema de colas?

b) Dibujar el diagrama de estados y sus tasas de transición.

c) Obtener, caso de existir, las probabilidades estacionarias de los estados.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo no pueda ser reparado en el taller principal ni en el anexo?

e) ¿Cuáles son las características de la política de gestión (cantidad del pedido y punto de reorden)?

Suponemos los siguientes datos:

1. $\lambda = \mu_1 = \mu_2 = 6$,
2. el taller principal y el anexo funcionan durante 9 horas diarias durante 250 días al año,
3. cada vehículo requiere el recambio de la pieza averiada,
4. el retraso en la recepción de un pedido de esas piezas es de 16 días,
5. el coste de pedido es 500 € y el de almacenamiento es 4 €/unidad y año y
6. la política de gestión del inventario de la pieza es la de periodo y cantidad de pedido constante.

PROBLEMA 31

Un taller, especializado en la reparación de una cierta pieza, tiene un mecánico y capacidad para dos vehículos. Si llega un tercer vehículo, es enviado a un pequeño taller anexo, con capacidad para un solo vehículo, donde otro mecánico procede a la reparación. Cuando el mecánico de este segundo taller acaba la reparación vuelve a sus ocupaciones habituales y retorna cuando nuevamente un vehículo sea enviado al taller anexo. Los vehículos que no pueden ser reparados en ninguno de los dos talleres abandonan el sistema.

Los vehículos llegan de acuerdo con una ley poissoniana de intensidad λ vehículos/hora. Los tiempos de reparación de ambos mecánicos son exponenciales y las respectivas tasas de reparación son υ_1 y υ_2 vehículos/hora.

a) ¿Cuál es la variable de estado de este sistema de colas?

b) Dibujar el diagrama de estados y sus tasas de transición.

c) Obtener, caso de existir, las probabilidades estacionarias de los estados.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo no pueda ser reparado en el taller principal ni en el anexo?

e) ¿Cuáles son las características de la política de gestión (cantidad del pedido y punto de reorden)?

Suponemos los siguientes datos:

1. $\lambda = \mu_1 = \mu_2 = 6$,
2. el taller principal y el anexo funcionan durante 9 horas diarias durante 250 días al año,
3. cada vehículo requiere el recambio de la pieza averiada,
4. el retraso en la recepción de un pedido de esas piezas es de 16 días,
5. el coste de pedido es 500 € y el de almacenamiento es 4 €/unidad y año y
6. la política de gestión del inventario de la pieza es la de periodo y cantidad de pedido constante.

I.8 Resultados de la biblioteca de problemas

RESULTADO DEL PROBLEMA 1

a) $P(el\ \ cajero\ \ ocioso) = p_0 \ \ = 1 - \rho = 1/3$. El 33.33 % del tiempo está ocioso.

b) $W_q = 1/15 = 4$ minutos

c) $L = 2, L_q = 4/3$. Fracción en cola = 2/3. El 66.67 % de los clientes que están en el sistema están en cola.

RESULTADO DEL PROBLEMA 2

a) $P(línea\ de\ espera) = 1 - p_0 - p_1 = 4/9$

b) $L_q = 4/3$ personas en cola.

c) $W_q = 2/15$ horas = 8 minutos de media en cola.

RESULTADO DEL PROBLEMA 3

a) $L_q = 1.6182$ personas.

b) $W_q = 0.4116$ horas = 24.69 minutos.

c) El peluquero está ocioso el 22.72 % del tiempo.

RESULTADO DEL PROBLEMA 4

a) $L_q = 4.1\widehat{6}$ obreros.

b) $W_q = 16.\widehat{6}$ minutos.

c) El coste por atención a los obreros es de 14000 u.m. diarias. El coste del oficinista es 2000 u.m. diarias. Si se pone otro oficinista (modelo M/M/2) el coste de los obreros resulta 2994.6 (2823.53?) u.m. diarias y el de los oficinistas 4000 u.m. diarias. Claramente, compensa poner dos servidores en el sistema.

RESULTADO DEL PROBLEMA 5

a) $p_0 = 0.5746,\ p_1 = 0.2873,\ p_2 = 0.1077,\ p_3 = 0.0269,\ p_4 = 0.0034$

b) $L_q = 0.1717$ aviones en espera a ser reparados y $W_q = 0.0501$ años = 18.3 días.

RESULTADO DEL PROBLEMA 6

a) $W_q = 0.1\widehat{6}$ horas = 10 min.

b) $L_q = 1.\widehat{3}$ clientes.

c) El tamaño medio de la cola cuando no está vacía es de 3 personas y la probabilidad de que haya al menos dos personas en el sistema es $0.\widehat{4}$.

RESULTADO DEL PROBLEMA 7

L=0.2537 máquinas en el taller.

RESULTADO DEL PROBLEMA 8

a) $1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 0.5261$.

b) $P(\text{al menos un cajero ocioso}) = 0.\widehat{24}$.

RESULTADO DEL PROBLEMA 9

a) *L*=3.285.

b) 0.96 es el número medio de vehículos que no pueden entrar al servicio.

RESULTADO DEL PROBLEMA 10

a) p_0 =0.1526, L_q =0.0283, *L*=1.9033, W_q =0.0019 horas=7 s, *W*=0.1269 horas = 7min.36 s

c) p_0 =0.03226, L_q =13.61, *L*=15.49, W_q = 0.90733 horas=54.44min., *W*=1.03 horas = 61.8min.

d)

RESULTADO DEL PROBLEMA 11

a) *L*=2.4 empleados en el departamento de control de calidad.

b) *L*=1.4778 empleados en el departamento de control de calidad.

RESULTADO DEL PROBLEMA 12

a) Empleado actual: *L* = 5 clientes, *W* = 30 minutos

Empleado con cursillo: *L* = 8.625 clientes, *W* = 51.750 minutos. Los resultados son más sensibles al tiempo medio de servicios que a su variación.

b) La varianza saldría negativa, es decir, no es posible compensarlo de ninguna forma.

RESULTADO DEL PROBLEMA 13

L=2.9583 máquinas.

RESULTADO DEL PROBLEMA 14

W_q = 2.28 minutos.

RESULTADO DEL PROBLEMA 15

a) L= 39/760 pacientes.

b) W= 15 min. y 23 s

c) W_q = 23 s

d) L_q = 1/760 pacientes.

RESULTADO DEL PROBLEMA 16

El coste por trabajo por unidad de incremento de μ (100 sentencias por minuto) por unidad de tiempo (día) = 0.0498 u.m.

El coste por retrasar un trabajo un día es 10 u.m.

λ = 50 trabajos por día.

De aquí se deduce que el μ óptimo es 123 trabajos por día, es decir 256 sentencias por minuto.

RESULTADO DEL PROBLEMA 17

El coste del primer empleado, suponiendo que estuviera él solo, es de 35 u.m./hora. El coste del segundo empleado es de 13 u.m./hora. Es más económico el segundo.

RESULTADO DEL PROBLEMA 18

a) $p_0 = 0.3983$, $p_1 = 0.3187$, $p_2 = 0.1912$, $p_3 = 0.0765$, $p_4 = 0.0153$.

b) Aproximadamente 3 máquinas en operación.

c) El coste medio total por día es 203.67 u.m./día.

d) Al ser dos sistemas M/M/1 con población finita m=2 y parámetros λ=1/10 y μ=1/2, el coste total medio asociado es de 211.08 u.m./día.

e) Sistema M/M/2 con población finita m=4, el coste esperado es de 200.34 u.m./día. Resulta ser el sistema más económico.

f)

RESULTADO DEL PROBLEMA 19

Con un mecánico se obtiene un coste de 140 u.m. y con dos de 152 u.m.

RESULTADO DEL PROBLEMA 20

Coste actual por hora = 2456.62. Coste con aerosol = 1891.55. Coste con dos servidores = 1389.43. Resulta preferible poner dos servidores.

RESULTADO DEL PROBLEMA 21

a) La tasa óptima es de 14.47 radios por día, con un coste diario de 378.43225 €.

b) En este caso se obtiene un coste diario de 395.184, que es peor.

RESULTADO DEL PROBLEMA 22

Aplicando el modelo general ya que las distribuciones son exponenciales, pero la tasa de servicio varía según el número de clientes que haya en el sistema, se obtiene:

p_0 =0.264, p_1 =0.1983, p_2 =0.1653, p_3 =0.1653, p_4 =0.2066

RESULTADO DEL PROBLEMA 23

1. $\lambda = 1/5$ trabajos/minuto
2. Sí, pues $\rho = 3/4 < 1$
3. $p_0 = 1/7$ y por lo tanto $L = 24/7 = 3.4286$ trabajos
4. Tasa de atención $c\mu = 4/15$ trabajos por minuto, entonces $3.4286\dfrac{15}{4} = 12.857$ minutos
5. Coste/h = $20L = 68.572$ €/h
6. Coste total por trabajo = $10\dfrac{20}{60}W = \dfrac{10}{3}\dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{10}{3}\dfrac{3.4286}{0.2} = 57.1433$ €

RESULTADO DEL PROBLEMA 24

Coste/h = Coste amortización + Coste operativo $(1 - p_0)$ + Coste clientes L

Coste robot 1 = $100+200\dfrac{5}{6}+80\dfrac{5/6}{1/6}=666.66$ €/h

Coste robot 2 = $150+400\dfrac{5}{7}+80\dfrac{5/7}{2/7}=635.7143$ €/h

Es más barato el segundo robot.

RESULTADO DEL PROBLEMA 28

a) Tiempo medio de un artículo en C1:

$$\lambda_{C1}=15\mathrm{art/h} \qquad \mu_{C1}=\frac{1\mathrm{art}}{3\mathrm{min}}=\frac{60}{3}\mathrm{art/h}=20\mathrm{art/h}$$

Modelo M/M/1: $\rho=\dfrac{15}{20}=0.75<1$

$$W_{C1}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}=\frac{1}{20\cdot 0.25}=1/5\mathrm{h}=12\mathrm{min} \quad L_{C1}=\lambda_{C1}W_{C1}=15\cdot 1/5=3$$

Tiempo medio de un artículo en C2:

$$\lambda_{C2}=15\frac{2}{3}=10\mathrm{art/h} \qquad \mu_{C1}=\frac{1\mathrm{art}}{10\mathrm{min}}=\frac{60}{10}\mathrm{art/h}=6\mathrm{art/h}$$

Modelo M/M/2: $\rho=\dfrac{10}{12}=5/6<1$

$$p_0=\frac{1}{\dfrac{(5/3)^2}{2\cdot 1/6}+1+5/3}=\frac{1}{25/3+3/3+5/3}=1/11$$

$$L_{C2}=\frac{(5/3)^2 5/6}{2\cdot 1/6^2}1/11+5/3=\frac{180}{33}=5.46$$

$$W_{C2}=\frac{L_{C2}}{\lambda_{C2}}=\frac{180/33}{10}=18/33\mathrm{h}=32.72\mathrm{min}$$

Tiempo medio de un artículo en C3:

$$\lambda_{C3}=15\frac{1}{3}=5\mathrm{art/h} \qquad \mu_{C1}=\frac{1\mathrm{art}}{7.5\mathrm{min}}=\frac{60}{7.5}\mathrm{art/h}=8\mathrm{art/h}$$

Modelo M/G/1: $\rho=5/8<1$

$$\sigma_{C3}^2 = 4/60^2$$

$$L_{C3} = 5/8 + \frac{(5/8)^2 + 5^2 \cdot 4/60^2}{2 \cdot 3/8} = \frac{511}{432}$$

$$W_{C3} = \frac{L_{C3}}{\lambda_{C3}} = \frac{511/432}{5} = 0.2366\text{h} = 14.19\text{min}$$

Tiempo proceso A: 12 min + 32.72 min = 44.72 min

Tiempo proceso B: 12 min + 14.19 min = 26.19 min

b) El coste horario del sistema es

$$0.1€/\text{min} \cdot 60\text{min/h}(L_{C1} + L_{C2} + L_{C3}) = 6(3 + 180/33 + 511/432) = 57.82\,€/\text{h}$$

El coste imputable a los productos procesados según A:

$$0.1€/\text{min}(W_{C1} + W_{C2}) = 0.1 \cdot 44.72 = 4.47€/\text{art}$$

El coste imputable a los productos procesados según B:

$$0.1€/\text{min}(W_{C1} + W_{C3}) = 0.1 \cdot 26.19 = 2.619€/\text{art}$$

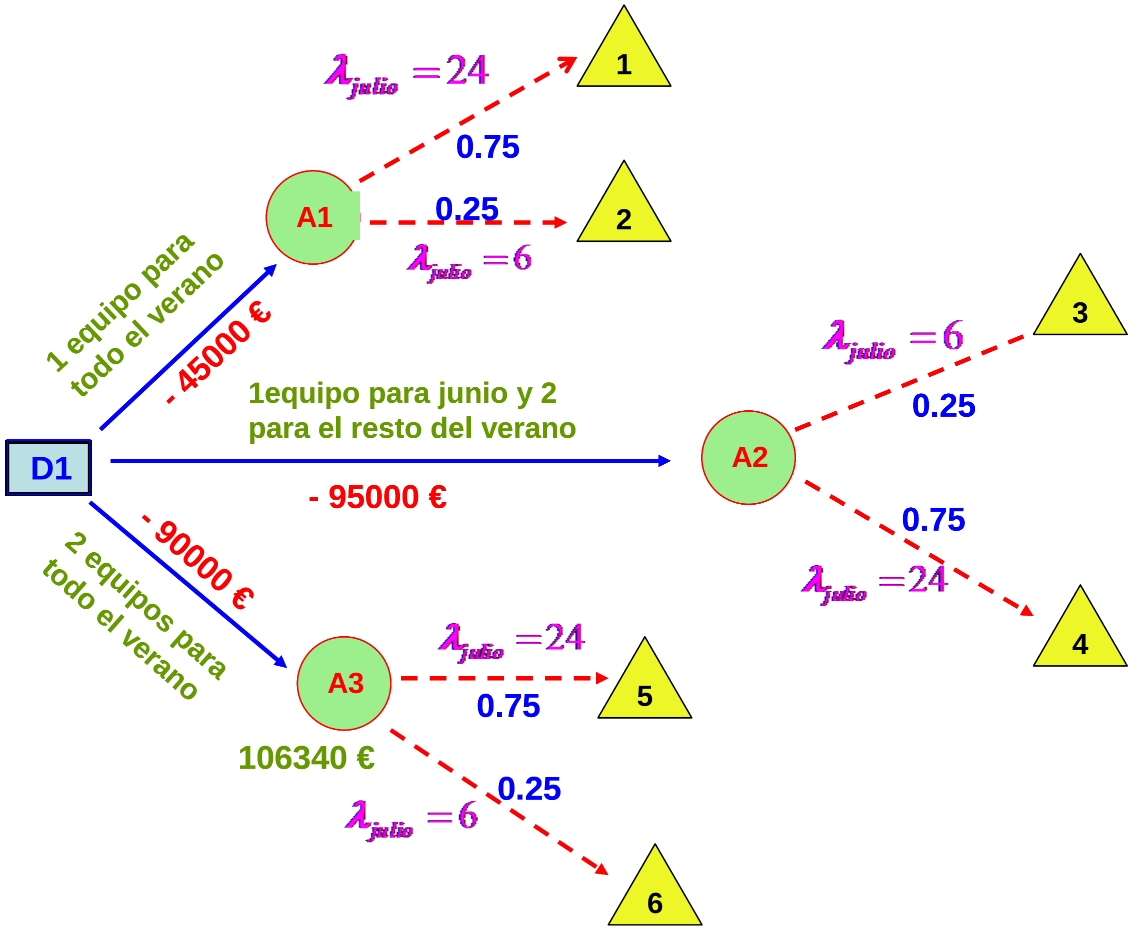
RESULTADO DEL PROBLEMA 29

El empresario se encuentra a comienzos de junio ante tres posibles alternativas:

1. Contratar un equipo de tres mecánicos para los tres meses de verano,
2. Contratar dos equipos de tres mecánicos para todo el verano, o
3. Contratar en junio un equipo y otro más en julio.

Los costes asociados a las tres decisiones son respectivamente de 45000, 90000 y 95000 €. Posteriormente, en el mes de julio, el azar juega su papel modificando al alza, $\lambda = 24$, o a la baja, $\lambda = 6$, la tasa diaria de llegadas de motos averiadas, con probabilidades respectivas de 0.75 y 0.25.

Todo ello se refleja en el siguiente árbol de decisión.



Dependiendo de la decisión tomada y de la evolución de las tasas se obtienen diferentes ingresos. Para calcularlos, hay que considerar que nos encontramos con diferentes modelos de colas, todos ellos del tipo **M/M/s/4,** donde **s** toma los valores **1** ó **2**, con **μ = 12,** y **λ = 12, 24 ó 6.**

El punto clave es determinar la proporción de motos que no podrán ser atendidas, proporción que viene dada por la probabilidad de que el taller se encuentre lleno, es decir, la probabilidad p_4 de que la cola se encuentre en el estado 4. De acuerdo con las fórmulas correspondientes a este modelo tenemos que

a) s = 1

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, \qquad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

Por tanto:

1. **Si λ = 12,** $\frac{\lambda}{\mu} = 1 \Rightarrow p_0 = 0.2 \Rightarrow p_4 = 0.2 \quad \lambda_{EF} = 9.6$

2. **Si λ = 24,** $\frac{\lambda}{\mu} = 2 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{31} \Rightarrow p_4 = \frac{16}{31} \quad \lambda_{EF} = 11.613$

3. **Si λ = 6,** $\frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \Rightarrow p_0 = \frac{16}{31} \Rightarrow p_4 = \frac{1}{31} \quad \lambda_{EF} = 5.807$

b) s = 2

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}\sum_{n=0}^{3}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n}, \quad p_n = 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n p_0 \quad (n > 1)$$

Por tanto:

4. **Si λ = 12,** $\frac{\lambda}{\mu} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{8}{23} \Rightarrow p_4 = \frac{1}{23} \quad \lambda_{EF} = 11.478$

5. **Si λ = 24,** $\frac{\lambda}{\mu} = 2 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{9} \Rightarrow p_4 = \frac{2}{9} \quad \lambda_{EF} = 18.\widehat{6}$

6. **Si λ = 6,** $\frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \Rightarrow p_0 = \frac{128}{213} \Rightarrow p_4 = \frac{1}{213} \quad \lambda_{EF} = 5.972$

Con estos datos, los ingresos esperados son los siguientes:

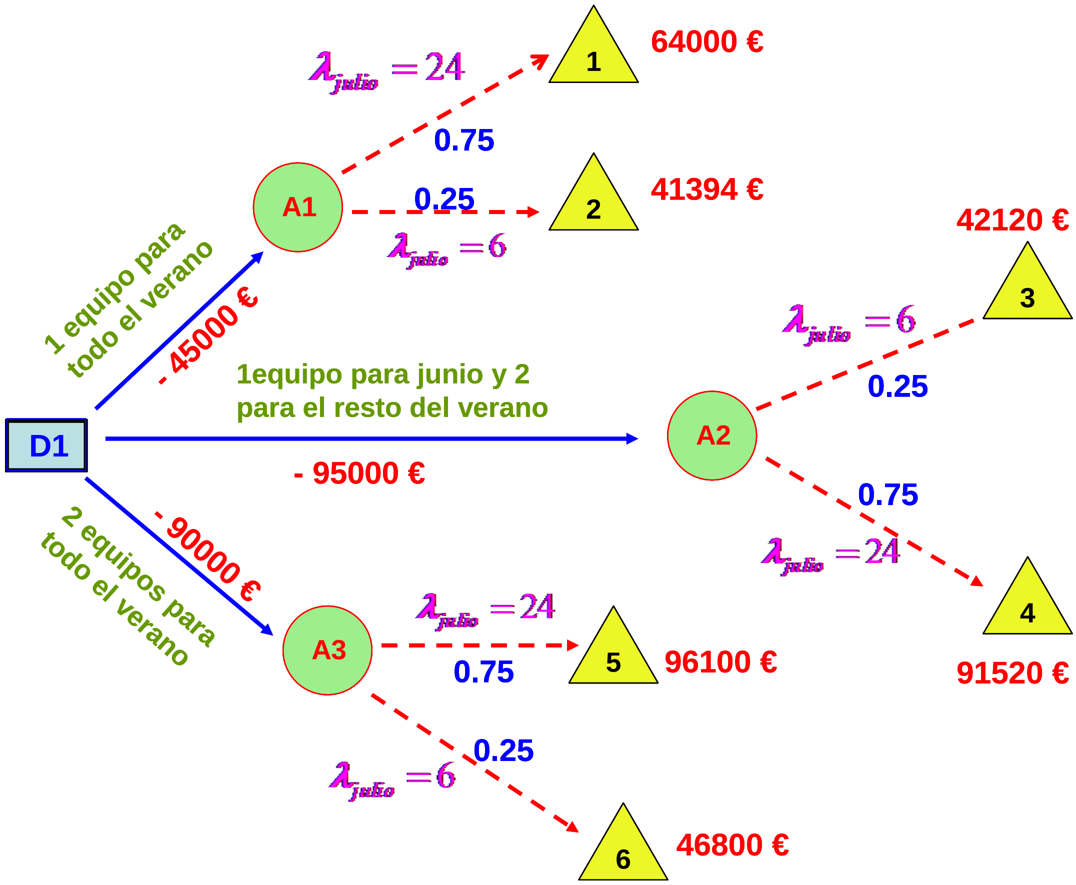
1. si decide contratar un solo equipo para todo el verano son:
   a. Durante el primer mes del verano llegan en promedio 360 motos, de las que son atendidas el 80%. Los ingresos durante este mes son de $360 \cdot 0.8 \cdot 65 = 18720\,€$.
   b. Durante los otros dos meses, si la tasa de motos sube a 24, sólo es atendida una proporción del 15/31 de las $60 \cdot 24 = 1440$ motos que llegan en promedio, lo que supone unos ingresos adicionales para esos 2 meses de $1440 \cdot (15/31) \cdot 65 = 45280\,€$. Esto da unos ingresos totales para toda la campaña de 64000 €.

c. Si la media de motos desciende a 6, es atendida una proporción de 30/31, lo que se traduce en unos ingresos durante estos dos meses de $60 \cdot 6 \cdot (30/31) \cdot 65 = 22674\,€$ y unos ingresos globales de 41394 €.

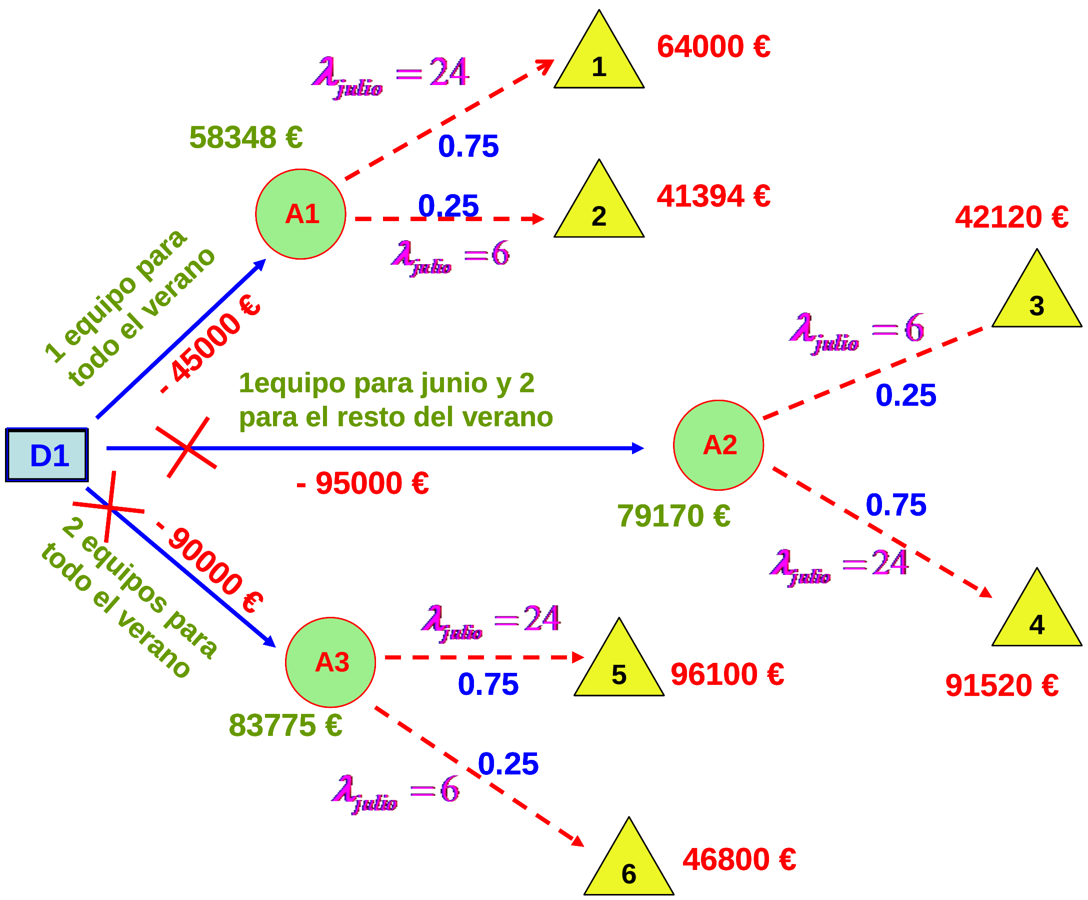
2. si decide contratar dos equipos para todo el verano son:
   a. Durante el primer mes del verano llegan en promedio 360 motos, de las que son atendidas la proporción 22/23. Los ingresos durante este mes son de $360 \cdot (22/23) \cdot 65 = 22383\,€$
   b. Durante los otros dos meses, si la tasa de motos sube a 24, sólo es atendida una proporción del 7/9 de las $60 \cdot 24 = 1440$ motos que llegan en promedio, lo que supone unos ingresos adicionales para esos 2 meses de $1440 \cdot (7/9) \cdot 65 = 72800\,€$. Esto da unos ingresos totales para toda la campaña de 95183 €.
   c. Si la media de motos desciende a 6, son atendidas prácticamente todas 212/213, lo que se traduce en unos ingresos durante estos dos meses de $60 \cdot 6 \cdot 65 = 23400\,€$ y unos ingresos globales de 45783 €.

3. si decide contratar un equipo al comienzo y otro más en julio
   a. Durante el primer mes del verano llegan en promedio 360 motos, de las que son atendidas el 80 %. Los ingresos durante este mes son de $360 \cdot 0.8 \cdot 65 = 18720\,€$.
   b. Durante los otros dos meses, si la tasa de motos sube a 24, sólo es atendida una proporción del 7/9 de las $60 \cdot 24 = 1440$ motos que llegan en promedio, lo que supone unos ingresos adicionales para esos 2 meses de $1440 \cdot (7/9) \cdot 65 = 72800\,€$. Esto da unos ingresos totales para toda la campaña de 91520 €.
   c. Si la media de motos desciende a 6, son atendidas prácticamente todas, lo que se traduce en unos ingresos durante estos dos meses de $60 \cdot 6 \cdot 65 = 23400\,€$ y unos ingresos globales de 42120 €.

Con estos datos la valoración de las distintas hojas del árbol queda reflejada en la siguiente figura

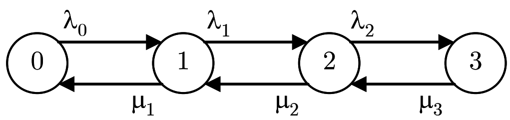


Pasamos a valorar los vértices del árbol. Los de azar con el valor medio ponderado de los valores asociados a los vértices extremos de arcos que salen de ellos y ya estén valorados. Los de decisión, eligiendo la alternativa de mayor valor esperado. Esto nos lleva a que la decisión óptima es la de contratar un solo equipo para toda la campaña.



RESULTADO DEL PROBLEMA 30

a) La variable de estado son los vehículos en el taller principal y en el anexo.
b)



$$p_3 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0, \quad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, \; p_3 + p_2 + p_1 + p_0 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = \lambda, \; \lambda_n = 0 \quad n \geq 3, \; \mu_3 = \upsilon_2 + \upsilon_1, \quad \mu_2 = \mu_1 = \upsilon_1,$$

c) $p_0 = p_1 = p_2 = 2/7 \simeq 0.286, \; p_3 = 1/7 \simeq 0.143$

d) La probabilidad de no poder ser reparado en el taller principal ni en el anexo es $p_3 \simeq 0.143$.

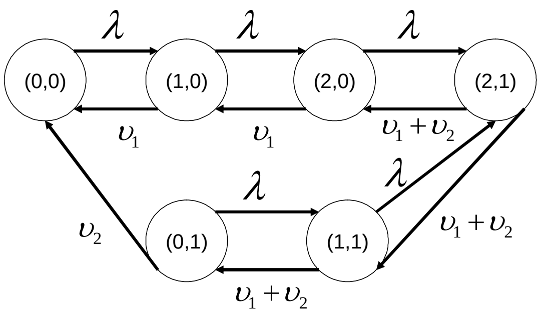
e) $d = \lambda(1 - p_3) = 6(6/7) \simeq 5.143$ piezas/hora, $c_p = 500$ €, $c_a = 4/(9 \cdot 250)$ €/pieza y hora, $l = 16$ días.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.143 \cdot 500}{4} 9 \cdot 250} \simeq 1700.86$$ piezas.

$T_0 = 1700.86/5.143 = 330.71h/9 \simeq 36.7$ días y punto de reorden $ld = 16 \cdot 5.143 \cdot 9 = 740.592$ piezas.

RESULTADO DEL PROBLEMA 31

a) La variable de estado son los vehículos en el taller principal y en el anexo, (n1,n2)



b) (0,0) $\lambda p_{00} = \upsilon_1 p_{10} + \upsilon_2 p_{01}$ (1,0) $\lambda p_{00} + \upsilon_1 p_{20} = (\lambda + \upsilon_1) p_{10}$ (2,0) $\lambda p_{10} + (\upsilon_1 + \upsilon_2) p_{21} = (\lambda + \upsilon_1) p_{20}$
(2,1) $\lambda(p_{20} + p_{11}) = 2(\upsilon_1 + \upsilon_2) p_{21}$ (1,1) $\lambda p_{01} + (\upsilon_1 + \upsilon_2) p_{21} = (\lambda + \upsilon_1 + \upsilon_2) p_{11}$ (0,1) $(\upsilon_1 + \upsilon_2) p_{11} = (\lambda + \upsilon_2) p_{01}$

c) $p_{00} = 1/3$ $p_{10} = 4/15$ $p_{20} = 1/5$ $p_{21} = 1/15$ $p_{11} = 1/15$ $p_{01} = 1/15$

d) La probabilidad de no poder ser reparado en el taller principal ni en el anexo es $p_{21} = 1/15 \simeq 0.067$.

e) $d = \lambda(1 - p_{21}) = 6(14/15) = 28/5 \simeq 5.6$ piezas/hora, $c_p = 500$ €, $c_a = 4/(9 \cdot 250)$ €/pieza y hora, $l = 16$ días.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.6 \cdot 500}{4} 9 \cdot 250} \simeq 1774.82$$ piezas.

$T_0 = 1774.82/5.6 = 316.93h/9 \simeq 35.2$ días y punto de reorden $ld = 16 \cdot 5.6 \cdot 9 = 806.4$ piezas.