INICIACIÓN AL QUEHACER MATEMÁTICO
Lenguaje, demostración y resolución de problemas

Miguel de Guzmán Ozámiz
Universidad Complutense de Madrid

Capítulo 1
Del lenguaje ordinario al lenguaje matemático

Esquema

1. **El lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano**
Ejemplos y ejercicios
2. **Proposiciones matemáticas**
Ejemplos y ejercicios
3. **Los conectores lógicos**
3.1 /no-A/
3.2 /A y B/
3.3 /A o B /, /o bien A o bien B/
3.4 El efecto del /no/ sobre /y/, /o/, /o bien... o bien/
3.5 La implicación. /si A entonces B/; /A implica B/; /A   B/; /B   A/; /A es suficiente para B/; /B es necesario para A/
3.6 La equivalencia /*A* si y sólo si *B*/, /*A* es necesario y suficiente para *B*/, /*A*   *B*/
Ejemplos y ejercicios
4. **Proposiciones compuestas**.
4.1.Tablas de verdad
4.2. Leyes lógicas
5. **Los cuantificadores lógicos**
5.1. El símbolo
5.2. El símbolo
5.3. Enlazando los cuantificadores
5.4. Negación de una proposición con cuantificadores
Ejemplos y ejercicios

Algunas notas complementarias
Sobre las definiciones. Ejemplo de los axiomas de la geometría. Hilbert. Otros axiomas para otros campos.
Sobre la implicación material.
El juego de los cuantificadores.

1. El lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático

La primera dificultad con la que uno puede tropezar al comenzar a ocuparse de aprender matemáticas seriamente es el lenguaje que se utiliza en la comunicación matemática. A veces da la impresión de que en matemáticas se habla un lenguaje muy similar al que empleamos cada día en nuestra comunicación normal, sólo que se refiere a objetos extraños que se van introduciendo a través de las definiciones. Pero pronto se puede empezar a percibir que se trata de un lenguaje peculiar en el que cada cosa tiene un significado muy preciso con el que es necesario familiarizarse y en el que se da un sentido un tanto diferente a términos que en el lenguaje normal tienen matices diferentes.

¿Por qué el lenguaje matemático tiene que ser diferente? Porque se pretende que sea uniforme y unívoco, es decir que signifique para todos lo mismo y que no presente ambigüedades. En matemáticas una de las actividades más importantes consiste en demostrar, es decir se trata de partir de unas afirmaciones iniciales en las que nos ponemos de acuerdo como punto de partida y de deducir de ellas, mediante reglas aceptadas de razonamiento, proposiciones más complejas. Y para ponernos de acuerdo necesitamos precisión en nuestras afirmaciones.

2. Proposiciones matemáticas

Los puntos de partida de la construcción matemática son las proposiciones iniciales, es decir los axiomas, por ejemplo ”*dos cosas A y B*, *cada una igual a una tercera C*, *son iguales entre sí*”, postulados ”*para cada dos puntos existe una única línea recta que pasa por ellos*”, definiciones ”*llamaremos primo a un número natural que no tenga más divisores que él mismo y la unidad*”...

Las definiciones contienen términos que, en rigor, tendríamos que definir a su vez y con ello, o acabaríamos en un círculo, definiendo lo que hay que definir mediante ello mismo o habríamos de continuar definiendo hasta el infinito. Por ello se utiliza para empezar otro tipo de definición, la definición implícita, que no es ajeno a la forma como procedemos en nuestros juegos, por ejemplo el ajedrez. Por convenio decimos: esta pieza será un caballo. Y a continuación especificamos la forma en que ha de moverse. La pieza no es un caballo porque se parezca a un caballo, sino porque convenimos en que se puede mover como hemos determinado que se ha de mover un caballo de ajedrez. Lo que interesa es cómo se mueven las fichas, qué reglas siguen...

Esto es lo que se llama definición implícita. Por ejemplo, en geometría no definimos lo que es un punto tratando de describir un punto. Se procede de la siguiente manera. Convenimos en que hay tres clases de objetos. A los de la primera clase los denominamos puntos, a los de la segunda clase rectas, a los de la tercera clase planos. Y a continuación convenimos en que para cada dos puntos hay una única recta que pasa por ellos, que para una recta y un punto que no está en ella hay un único plano que contiene a los dos, etc. Es decir, definimos eso que llamamos punto, recta y plano a través de la forma en que convenimos que se comporta cada uno con respecto a los otros.

Aquellas proposiciones en las que estamos de acuerdo, proposiciones iniciales que nos parecen obvias, axiomas, postulados, y las que resultan claramente de ellas a través de las reglas de deducción que todos aceptamos, decimos que son verdaderas. Las proposiciones que afirman lo contrario son falsas. Un trabajo muy esencial de la matemática consiste en determinar si una proposición es verdadera o falsa.

Los matemáticos que se dedican al estudio de la construcción rigurosa de las matemáticas de esta forma, a partir de los axiomas y postulados, son los que estudian los fundamentos de la matemática. Hacen un trabajo muy importante y se puede decir que son relativamente pocos. Para empezar a aprender matemáticas seriamente no hace falta partir desde los axiomas. Podemos partir de principios y objetos que ya han sido introducidos de formas diversas. Por ejemplo, suponemos que sabemos suficientemente bien lo que son los números naturales, suponemos que entendemos lo que son los números enteros y fraccionarios, lo que es un ángulo, un polígono... Y de esas definiciones y afirmaciones que aceptamos como conocidas vamos construyendo, deduciendo, otras más complejas y menos conocidas. Algunas muy intrincadas.

La construcción de nuevas proposiciones se hace fundamentalmente, como veremos enseguida, mediante los conectores lógicos y los cuantificadores lógicos. Las proposiciones más sencillas son como los ladrillos, los conectores y cuantificadores son el cemento que los une para crear el edificio matemático. Por ejemplo A es la proposición /3 2/, y B es la proposición /5 es primo/. Con ellas podemos formar una proposición nueva C que es /A y B/, es decir /3 2 y 5 es primo/. Ese /y/ es un conector lógico.

Puesto que lo importante para el matemático es determinar cuándo una proposición es verdadera, tendremos que dejar bien claro cuándo /A y B/ es verdad y cuándo falso a partir de la verdad o falsedad de A y B. Enseguida se entenderá esto más claramente.

El lenguaje matemático se construye por lo tanto relacionando diversas afirmaciones que llamamos proposiciones matemáticas y que designaremos por A, B, C,... Una proposición matemática es una afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos y que es verdadera o falsa, es decir que tiene uno de los dos posibles valores V (verdadero) o F (falso). Por ejemplo la expresión / 2 3 / no es una proposición matemática, aunque contenga símbolos matemáticos ya que no afirma nada y no puede ser verdadera ni falsa. La expresión / 2 3 7 /, en cambio, sí es una proposición matemática (por supuesto falsa) y / 2 3 5 / es también una proposición matemática (verdadera). (Las barras /.../ que venimos empleando y que emplearemos en lo que sigue muy profusamente hacen el papel de las comillas y nos sirven, como acabamos de hacer, para referirnos a expresiones que aparecen en nuestro discurso).

Los conectores lógicos constituyen una manera de formar nuevas proposiciones. Por otra parte, en las afirmaciones del discurso matemático, y también en el lenguaje ordinario, aparecen con mucha frecuencia modos constantes de referirnos a ciertos o a todos los elementos de una colectividad, de un conjunto bien determinado. Estos modos son los llamados cuantificadores lógicos: /para cada.../, /para algún.../ (en lenguaje cotidiano más cercano: /todos los.../, /alguno de los.../). Así decimos /para cada número impar n hay algún número entero k tal que n $2k$ 1/ . Y en el lenguaje cotidiano decimos también /para cada calle de esta ciudad hay dos aceras/.

Vamos a examinar primero los conectores lógicos, estos elementos aglutinantes, para tratar de detectar alguna posible diferencia que se puede encontrar en su utilización matemática respecto del uso cotidiano, a fin de prevenir posibles malentendidos. Más adelante examinaremos detenidamente la forma de uso en el lenguaje ordinario y en matemáticas de los cuantificadores lógicos.

3. Los conectores lógicos

Los conectores lógicos, como se ha dicho, vienen a ser como el cemento que une unas con otras las proposiciones, que son los ladrillos, para formar proposiciones más complejas.

Como hemos visto, lo característico de una proposición matemática es su valor de verdad o falsedad. Por ello, como veremos, lo importante al formar una proposición nueva P a partir de otras más sencillas, A, B, C,..., será determinar con precisión cuándo la proposición P es verdadera o falsa dependiendo de la verdad o falsedad de las proposiciones A, B, C,... En otras palabras se trata de definir claramente los valores de verdad o falsedad de la proposición compuesta P sabiendo los valores de verdad o falsedad de las proposiciones más sencillas A, B, C,... de las que está compuesta. Los ejemplos que siguen tras la introducción de cada uno de los conectores lógicos aclararán lo que se dice.

3.1

/no-A/

En la negación de una expresión sencilla no suele haber problema ninguno. Su uso es el mismo en el lenguaje ordinario y en el matemático. Afirmar /no A/ significa lo mismo que afirmar que /no es cierto que A/ o bien que /A no tiene lugar/, con un mismo sentido en ambos lenguajes, ordinario y matemático.

Por lo tanto es claro que:

/no A/ será una proposición verdadera cuando la proposición /A/ sea falsa y /no A/ será falsa cuando /A/ sea verdadera. De forma esquemática

A	no-A
V	F
F	V

Tabla de verdad de no-A

Ejemplos:

La expresión /7   8   56/ es una proposición matemática verdadera. Su negación /7   8 no es 56/ es una proposición matemática falsa.

La expresión /6 es un número primo/ es una expresión matemática. Es falsa porque 6   2   3. Su negación /6 no es un número primo/ es verdadera.

En el lenguaje matemático, la negación de una negación equivale siempre a una afirmación. En nuestro lenguaje natural, en español, no siempre es así, sino que a veces utilizamos la acumulación de negaciones para dar mayor énfasis a nuestra expresión. /No iré nunca/ es para nosotros lo mismo que /nunca iré/. En lenguaje más formal /no es verdad que no está en casa/ equivale a /está en casa/ y, en general /no-(no-A)/ es lo mismo que /A/.

En lo que sigue veremos cómo el conector /no/ modifica las otras conexiones que vamos a estudiar de un modo uniforme, sencillo y reducible al automatismo.

Como veremos más adelante, cuando se trata de negar una cadena de expresiones relacionadas por cuantificadores lógicos, lo que hay que realizar muy a menudo en el transcurso de las demostraciones matemáticas, es cuando la situación se complica un tanto, pero asímismo se pueden proponer reglas fijas que permiten realizar esta operación automáticamente.

****

Ejercicio.

Considera la expresión siguiente

/De ninguna manera iré nunca jamás ni contigo ni con tu padre a Berlín/

Construye otra equivalente con negaciones más simples eliminando el énfasis retórico.

****

Ejercicio

Considera la expresión

/En ninguna oficina de este maldito país, ni en Agosto, ni en nínguna otra época, nadie está nunca ni dos horas seguidas en su sitio/

Quita la exageración retórica construyendo una frase equivalente con el mínimo número de negaciones.

****

Ejercicio

Observa cómo la negación múltiple está tan enraizada que el prescindir de ella causa un efecto expresivo interesante. Trata de encontrar expresiones análogas.

/Se fue a ninguna parte/

/Este proceso conduce rápidamente a nada/

/El viaje a ninguna parte/

****

3.2

/A y B/

Tanto en el lenguaje normal como en el lenguaje matemático, si A es una proposición y B otra, entonces /A y B/ tendrá lugar, será verdadera, si es que A es verdadera y B también lo es, y en todo otro caso será falsa. Es decir /A y B/ será verdadera únicamente en el siguiente caso:

(1) A es verdadera y B es verdadera

/A y B/ es falsa en todos los otros casos , es decir cuando:

(2) A es verdadera y B es falsa

(3) A es falsa y B verdadera

(4) A es falsa y B es falsa

Esquemáticamente

A	B	A y B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad de /A y B/

No se presenta gran problema en el uso de /y/ en matemáticas. Pero sí conviene observar que en el lenguaje ordinario /A y B/ suele presentar connotaciones diversas, tal vez temporales, causales, etc..., de las que el lenguaje matemático las ha despojado. En el lenguaje cotidiano las dos proposiciones /lo haré e iré/ y /iré y lo haré/ tienen sentidos distintos si bien, desde el punto de vista matemático /A y B/ es equivalente a /B y A/.

Por otra parte /y/ se utiliza con sentidos diferentes en contextos tales como /Pedro y Juan son rubios/, que equivale a /Pedro es rubio y Juan es rubio/, y /Pedro y Juan son hermanos/, que ciertamente no equivale a /Pedro es hermano y Juan es hermano/. Como se ve, esta circunstancia se da frecuentemente cuando el predicado de ”son” es un adjetivo de relación entre los sujetos. También aparece este tipo de posible ambigüedad en matemáticas. Considera las siguientes afirmaciones: /los triángulos ABC y A’B’C’ son equiláteros/ y /los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes/.

****

Ejercicio

Aclara el sentido de las siguientes frases con una más explícita.

a) /No mandé que Juan y Pedro lo hicieran. Lo que ordené fue que Juan o Pedro lo hicieran./

b) /Ordené que lo hicieran Pedro y Juan. No dije que lo hicieran Pedro o Juan./

****

3.3

/A o B /, /o bien A o bien B/

El vocablo /o/ tiene dos significados distintos en el uso cotidiano. Veamos un ejemplo. En el escaparate de la librería de la universidad aparece escrito

/Nuestros clientes en posesión del carnet de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento/.

Está claro que no se pretende excluir del descuento a aquellos que estén en posesión de los dos carnets. Se trata del significado no excluyente de /o/. Según él /A o B/ tendrá lugar, será verdadera, cuando tenga lugar, sea verdadera, al menos una de las dos proposiciones, es decir, será verdadera en cualquiera de los tres casos siguientes:

(1) A es verdadera y B falsa

(2) B es verdadera y A falsa

(3) A es verdadera y B es verdadera

Y /A o B/ será falsa en el caso

(4) A es falsa y B es falsa

En esquema

A	B	A o B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad de /A o B/

Pero éste no es el único significado de /o/ en nuestro uso normal. Un ejemplo. Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque de atracciones y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice /No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque de atracciones/. Este es el sentido excluyente de /o/.

/A o B/ en sentido excluyente significa que tiene lugar exactamente una de las dos proposiciones. Para distinguirlo del otro sentido no excluyente vale la pena hacerlo explícito y expresarlo /o bien A o bien B/. Esto será verdadero en los casos siguientes:

(1) A verdadera y B falsa

(2) A falsa y B verdadera.

Y será falso en los casos siguientes:

(3) A verdadera y B verdadera

(4) A falsa y B falsa.

Esquemáticamente

A	*B*	o bien *A* o bien *B*
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Tabla de verdad de /o bien A o bien B/

Una tabla distinta, por supuesto de la del /o/ no excluyente.

En el lenguaje matemático, por convención, /o/ tiene siempre un significado no excluyente. Esto implica a veces una patente diferencia con el uso del lenguaje ordinario que llama la atención a quien esta convención no se le ha hecho bien explícita y familiar. En el lenguaje matemático es una proposición verdadera /3 es menor o igual que 5/ y también lo es /5 es menor o igual que 5/ aunque todos sabemos bien 3 es menor que 5 y que 5 es igual que 5.

Se podría expresar el sentido de esta convención diciendo que el matemático en su uso del /o/ se considera obligado a decir la verdad, pero no se considera obligado a decir nada más que la verdad. Lo cual no es la forma habitual de proceder en nuestra vida ordinaria. Si a mi pregunta sobre cuándo se marcha, mi amigo me responde /el sábado o el domingo/ y después me entero de que ese mismo día tenía en su bolsillo su billete para el sábado, por muy habituados que los dos estemos al lenguaje matemático, pensaré que pretendía ocultarme algo.

También, de acuerdo con esta convención, en matemáticas la expresión /5 es mayor que 7 o Madrid tiene más de 3 millones de habitantes/ es, tal vez sorprendentemente para el ciudadano normal, una expresión con perfecto sentido, más aún, verdadera.

Por todo ello en matemáticas se suele usar siempre para el /o/ excluyente, la expresión /o bien... o bien/. Y también lo hacemos en el lenguaje ordinario, cuando queremos poner bien claramente de manifiesto que se trata del sentido excluyente.

****

Ejercicio

Pepe dice: /ordené que vinieran Pedro o Juan/.
Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?
****

Ejercicio
Julio dice:/Ordené que vinieran o bien Pedro o bien Juan/
Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?

Esta confusión posible del /o/ en nuestro lenguaje ordinario es la que ha causado una forma relativamente reciente de poner en claro que pretendemos que nuestro /o/ tenga sentido no exclusivo escribiendo ”y/o”. Ejemplo:

/Los estudiantes de álgebra y/o análisis tendrán una reunión el viernes/

En latín, como en otros idiomas modernos, la ambigüedad del castellano no existe, ya que el /o/ no excluyente se expresa mediante ”vel” y el yo excluyente mediante ”aut...aut”. En alemán el /o/ no excluyente es /A oder B/ y el excluyente /entweder A oder B/.En inglés el /o/ no excluyente es /A or B/ y el excluyente es /either A or B/.

3.4
El efecto del /no/ sobre /y/, /o/, /o bien... o bien/

El efecto del /no/ sobre /A y B/ es bastante claro. En general /no-(A y B)/ es lo mismo que /(no-A) o (no-B)/, teniendo aquí /o/ su sentido no excluyente. Así, /no-(A y B)/ será falsa en el siguiente caso:

(1) A es verdadera y B es verdadera

Y será verdadera en los demás, es decir:

(2) A es falsa y B es falsa
(3) A es verdadera y B falsa
(4) A es falsa y B verdadera

Como se observa, la verdad o falsedad de una proposición compuesta, construida a través del uso de los conectores lógicos ya introducidos se puede averiguar de forma sencilla atendiendo a su sentido cuando es suficientemente simple, como la de arriba. Cuando se trata de una proposición más compleja se puede acudir a las tablas de verdad de los conectores que intervienen en ella, haciendo así automático el cálculo de su valor de verdad o falsedad. Por ejemplo, para la proposición /no-(A y B)/ se puede proceder , formando en un paso intermedio la tabla de verdad de /A y B/ y a continuación la de /no-(A y B)/. Como sigue:

A	B	A y B	no- A y B
V	V	V	F
V	F	F	V
V	V	F	V
V	F	F	V

Otro ejemplo. Formamos la tabla de verdad de /no-A o no-B/

A	B	no-A	no-B	no-A o no-B
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Como vemos, la última columna coincide en ambos casos y así las dos proposiciones /no-(A y B)/ y /no-A o no-B/ son verdaderas o falsas exactamente para los mismos valores de verdad y falsedad de A y B.

Un ejemplo: /No es verdad que el sábado llovió y que el lunes llovió/ es lo mismo que decir /es verdad que el sábado no llovió o que el lunes no llovió/, siendo esta expresión verdadera en alguno de los tres casos siguientes (significado no excluyente del /o/):
(a) el sábado no llovió y el lunes sí
(b) el lunes no llovió y el sábado sí
(c) el sábado no llovió y el lunes no llovió

El efecto del /no/ sobre /A o B/ (no excluyente) es también sencillo. Decir /no es verdad que vinieras tú o tu hermano/ (recuerda el sentido no excluyente de /o/) es lo mismo que decir /es verdad que tú no viniste y que tu hermano no vino/. En general /no-(A o B)/ es lo mismo que /(no-A) y (no-B)/ y es verdadera en el caso siguiente:
(1) A es falsa y B es falsa
En todos los demas casos es falsa:
(2) A es verdadera y B es verdadera
(3) A es verdadera y B es falsa
(4) A es falsa y B es verdadera

Este modo dual de comportarse el /o/ en el sentido no excluyente con el /y/ es una de las razones para utilizar en lógica formal y en matemáticas el /o/ con este sentido precisamente.

La negación del /o bien... o bien/ no presenta esta simetría. Decir /no es verdad que o bien iremos al cine o bien al parque/ es lo mismo que decir /es verdad que o bien iremos al cine y al parque o bien no iremos al cine ni al parque/.

Es decir, /no-(o bien A o bien B)/ equivale a /o bien (A y B) o bien (no-A y no-B)/, lo cual no presenta analogía ninguna con la negación de /A y B/. Resumiendo /no-(o bien A o bien B)/ será verdadera en los casos:
(1) A es verdadera y B es verdadera
(2) A es falsa y B es falsa
Y será falsa en los dos restantes:
(3) A es verdadera y B es falsa
(4) A es falsa y B es verdadera

****

Ejercicio
Expresa en una frase simple y clara la negación de la siguiente frase:
/Ni tú ni tu hermano sois irlandeses/
****
Ejercicio
Construye una frase sencilla y clara equivalente a la siguiente:
/No es verdad que tú eres brasileño y que tu padre es catalán/
****
Ejercicio
Construye una frase sencilla equivalente a
/No es verdad que tú eres brasileño ni que tu padre es catalán/
****
Ejercicio
Construye una frase sencilla equivalente a:
/No es verdad que tú no eres irlandés ni que tu hermano es inglés/
****
****
Ejercicio
Construye con otras palabras una frase que venga a afirmar lo mismo que la siguiente:
/No es verdad que vinieran Pedro o Juan/
****
Ejercicio
Construye con otras palabras una frase que venga a afirmar lo mismo que la siguiente:
/No es verdad que vinieran o bien Pedro o bien Juan/
****

3.5 La implicación

/si A entonces B/
/A implica B/
/A   B/
/B   A/
/A es suficiente para B/
/B es necesario para A/

El /si/ de nuestra comunicación normal constituye uno de esos vocablos polivalentes que necesariamente, al pasar a través del intento de los matemáticos de conseguir cierta uniformidad de uso, ha de llegar a resultados a veces chocantes con los usos cotidianos.

/si A entonces B/ viene a significar normalmente que el constatar que la situación indicada por A tiene lugar, es verdadera, ya nos basta para poder estar seguros de que la situación B tiene también lugar. Esto nos lleva a concluir que el que B no tenga lugar, que B sea falso, lleva consigo que A haya de ser falso, es decir /si no B entonces no A/, es más, las dos afirmaciones /si A entonces B/ y /si no B entonces no A/ son verdaderas y falsas al mismo tiempo.

En nuestra comunicación ordinaria una expresión de este tipo,/si A entonces B/, lleva aparejadas connotaciones muy diversas, tal vez de causalidad, temporalidad, a veces sobreentendiendo tácitamente relaciones nada fáciles de desentrañar. Y es también muy frecuente que se interprete inadecuadamente entendiendo /si A entonces B/ como si A fuera equivalente a B, es decir entendiendo no sólo que si A se cumple entonces se cumple B sino además que si B se cumple entonces se cumple también A. Por otra parte utilizamos /si/ en muchos casos que no corresponden a la descripción anterior:

/Si tienes sed, hay agua fresca en el frigorífico/, no nos lleva a pensar que si no hay agua fresca en el frigorífico entonces es que no tienes sed.

/Si te interesa, nací en Madrid/ no nos lleva a pensar que si no nací en Madrid no te interesa.

/Si tú eres diputado, yo soy obispo/ es un modo de significar la convicción tan fuerte que tengo de que no eres diputado, y se acerca más al significado adoptado en el lenguaje matemático para el /si A entonces B/, como veremos más abajo, puesto que, en buena lógica formal, la expresión anterior sólo es falsa cuando tú eres diputado (ya que yo ya sé que no soy obispo).

En otras ocasiones sucede que interpretamos mal nuestro /si... entonces/ del lenguaje ordinario porque nos inclinamos a sobreentender lo que no está dicho. Dijo /si llueve me quedo en casa/. Resulta que está en casa.

¿Qué deduces? Tal vez tu tendencia, como la de muchos otros, es decir: que llueve. Mal hecho. No dijo nada sobre lo que haría si no llovía. ¿Y si resulta que no está en casa? ¿Qué deduces? Ahora sí que se puede deducir que no llueve.

****

Ejercicio

Dijo /Voy al Banco. Si está abierto traigo 1.000 euros/. Viene con los 1.000 euros. ¿Qué deduces?. Viene sin los 1.000 euros. ¿Qué deduces?

****

En el lenguaje matemático /si A entonces B/ o lo que es lo mismo /A implica B/ se interpreta en un sentido bien definido. Será falsa únicamente cuando:

(1) A es verdadera y B es falsa

y será verdadera en el resto de los casos:

(2) A es verdadera y B es verdadera

(3) A es falsa y B es verdadera

(4) A es falsa y B es falsa

En esquema

A	*B*	*A B*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Tabla de verdad de *A B*

La expresión/si A entonces B/, que se expresa en matemáticas habitualmente /A implica B/ y también, simbólicamente /A B/, se expresa también como /A es suficiente para B/ y /B es necesario para A/ con exactamente la misma tabla de valores indicada arriba. La expresión /A es suficiente para B/ viene a poner el énfasis en que esta proposición es cierta cuando A es verdadera y B es verdadera (primera línea de la tabla) y la expresión /B es necesario para A/ pone el énfasis en que que la proposición es falsa cuando A es verdadera y B falsa (segunda fila de la tabla). Pero en matemáticas se considera que todas ellas son equivalentes y tienen la misma tabla de valores.

A mi parecer la forma más explícita y clara de expresar la implicación es /A B/ y, por motivos que veremos más adelante, al tratar de la demostración, aconsejaría, en caso de duda, traducir a este tipo de expresión afirmaciones a mi parecer más confusas como /B es necesario para A/.

Hay que subrayar que esta asignación de valores de verdad y de falsedad de la proposición /si A entonces B/ (que se suele llamar implicación material y que se hace por razones de congruencia y compleción de las tablas de valores para los diferentes conectores lógicos, como se puede ver en la nota 2 al final de este capítulo) conduce a afirmaciones un tanto peregrinas para el matemático y para cualquier persona normal. La verdad de /si A entonces B/ se puede dar siendo A verdadera o falsa y también se puede dar siendo B verdadera o falsa. Así la proposición /si 3 2 entonces 5 es primo/ es, según lo anterior, una proposición verdadera, como también lo es /si 3 2 entonces 5 no es primo/.

Es claro que la más interesante, tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista del lenguaje cotidiano, es la situación (2) , que es la usual en los procesos de demostración. La (3) y (4) corresponden al antiguo dicho ”*ex falso quodlibet sequitur*” (”de lo falso se sigue cualquier cosa”). La (1) es útil desde el punto de vista matemático para ver que /A no implica B/.

En las notas al final de la sección puedes encontrar alguna explicación más de la elección de la tabla de verdad para el conector /*A* *B*/.

Es interesante observar que /si A entonces B/ es equivalente a una expresión que solamente utilice los conectores anteriormente introducidos. Decir /si llueve, entonces me quedo en casa/ es lo mismo que decir /no sucederá que llueva y yo no esté en casa/. En general /si A entonces B/ es equivalente a /no-(A y no-B)/, como resulta fácilmente atendiendo al sentido o mediante la cosntrucción de la tabla de verdad.

Esto facilita el examen del efecto de la negación sobre /si A entonces B/ de la siguiente manera. /No es verdad que si A entonces B/, es decir /no-(si A entonces B)/ es lo mismo que /no-(no-(A y no-B))/, y esto (negación de negación es afirmación) es lo mismo que /A y no-B/.

Esto coincide con el sentido del lenguaje cotidiano: la falsedad de que A implica B coincide con que se verifica A y no se verifica B.

Como hemos podido ver, para la verdad de /A implica B/ desde el punto de vista estrictamente lógico, no se tiene en cuenta para nada la influencia del significado de A sobre el de B, lo que, naturalmente, no suele ocurrir en el lenguaje ordinario, ni tampoco en el matemático normalmente. /Si 2 es mayor que 3, entonces el Pisuerga pasa por Valladolid/ tiene sentido para un lógico y además es una proposición verdadera. E incluso es verdadera también, según nuestro convenio, /si 2 es mayor que 3, entonces el Pisuerga no pasa por Valladolid/. (Recordatorio de geografía: el Pisuerga pasa por Valladolid).

Afortunadamente para los matemáticos, nuestro cometido no nos lleva a ocuparnos de afirmaciones tan extrañas para el sentido común. La razón profunda para introducir en lógica, por convención, este significado de la implicación (implicación material), un tanto alejado del uso normal, es la necesidad de dar un sentido uniforme a nuestro discurso, mediante la exclusiva atención a la coherencia lógica interna, a través de una asignación precisa del valor de verdad o falsedad de nuestras afirmaciones (aquí /si A entonces B/)

según el valor de verdad o falsedad de las proposiciones de las que dependen (aquí A y B).

Con esta táctica nos alejamos de las innumerables complicaciones que el lenguaje natural lleva consigo, al precio ciertamente de alejarnos también de su inmensa riqueza significativa. El lenguaje matemático es, en lo que se refiere a capacidad de expresión, un pariente bien pobre del lenguaje natural, pero sirve bastante adecuadamente para cumplir su cometido.

En matemáticas se suele utilizar a menudo /si/ para introducir una definición. /Un número natural se llamará par si resulta al multiplicar otro número natural por 2/. Es bueno tener presente que el /si/ de las definiciones tiene significado distinto del anterior. No se trata aquí de una implicación sino de una equivalencia. El /si/ de las definiciones es más bien la asignación de un nombre,/se llama D cuando B/, y quiere decir que donde vea B puedo poner D y viceversa.

****

Ejercicio

/Si el Granada no gana el partido el domingo, Pepe será muy infeliz./

Resulta que el domingo gana el Granada y encuentras a Pepe, por la noche, totalmente infeliz. ¿Era la verdad de la proposición entre barras compatible con esta situación?

****

Ejercicio

Señala cuáles de las expresiones siguientes son verdaderas y cuáles falsas:

(a) /Si 2 7, entonces 1 3/

(b) /Si 2 7, entonces 1 3/

(c) /Si x 3, entonces 1 2/

(d) /Si x 3, entonces 1 2/

****

Ejercicio

Quieres demostrar que /A implica B/ es falso. ¿Como procederías?

(a) Demostrando que B es falso.

(b) Demostrando que A es falso.

(c) Demostrando que B es falso y que A es verdadero.

(d) Demostrando que B es verdadero y que A es falso.

(e) Demostrando que B es falso y que A es falso.

****

Ejercicio

Tu tarea es demostrar que A implica B y sabes que B es falso. ¿Qué tratarás de demostrar y por qué?

(a) Que A es verdadero.

(b) Que A es falso.

****

3.6
La equivalencia
/*A* si y sólo si *B*/
/*A* es necesario y suficiente para *B*/
/*A*   *B*/

La expresión /A si y sólo si B/ es relativamente reciente en el lenguaje matemático al uso. En el lenguaje más tradicional se expresaba /A es condición necesaria y suficiente para

B/. Y en la actualidad muy normalmente se utiliza el símbolo para expresar lo mismo /A B/.

Expresiones del tipo /A si y sólo si B/ donde A y B son proposiciones, solamente se suelen encontrar en nuestro idioma en el lenguaje matemático. No son usuales en el lenguaje natural. La expresión /A si y sólo si B/ significa que se verifican a la vez las dos implicaciones /si A entonces B/ y /si B entonces A/ en el sentido de la sección anterior, es decir /*A B*/ y /*B A*/. Por lo tanto, según se comprueba fácilmente /A si y sólo si B/ tendrá lugar, será verdadera, cuando: (1) A es verdadera y B es verdadera; (2) A es falsa y B es falsa. Será falsa cuando: (3) A es verdadera y B es falsa; (4) A es falsa y B es verdadera. En esquema

A	*B*	*A B*	*B A*	*A B* y *B A*	*A B*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

Tabla de verdad de /A B/

La expresión /A si y sólo si B/, por su mismo alejamiento de nuestra lengua natural, hace pensar en su sentido técnico de doble implicación, y así empleada resulta suficientemente clara.

Menos clara resulta si se pretende desdoblar en sus dos componentes de la siguiente forma:/ /A si B/ y /A sólo si B//. La expresión /A si B/ es, en otras palabras, /si B entonces A/, es decir /B implica A/, en cuyo significado ya hemos convenido antes. La expresión /A sólo si B/ es cuando menos oscura y sospechamos vehementemente que sería capaz de confundir al usuario normal del lenguaje cotidiano y tal vez a no pocos matemáticos, a menos que, reconociéndola como parte del contexto /si y sólo si/ la identifiquen con la expresión /A implica B/. La presencia del ”sólo” en la expresión hace tal vez pensar en otra cosa diferente.

****

Ejercicio

Podrías hacer el siguiente experimento contigo mismo y con otros, matemáticos o no. Piensa en la siguiente expresión

/voy sólo si vas tú/

y pregúntate con cuáles de las siguientes expresiones se identifica (¿dice lo mismo que alguna de ellas?), a cuál de ellas parece más cercana, con cuáles resulta su realización compatible o claramente incompatible (¿dice exactamente lo contrario que alguna de ellas?):

(1) /si vas tú, voy yo/
(2) /si yo voy, es que tú vas/
(3) /tu vas y yo no/
(4) /no vas y no voy/
(5) /voy y tú no vas/
(6) /o vamos los dos o no va ninguno/

****

Ejercicio

/Voy al cine sólo si está lloviendo/

Examínate a tí mismo y ensaya con otros con qué expresión de las siguientes parece identificarse plenamente y con qué es plenamente incompatible, de qué es la negación y a qué es equivalente:

(1) /si está lloviendo voy al cine/
(2) /sólo voy al cine cuando está lloviendo/
(3) /está lloviendo luego voy al cine/
(4) /si voy al cine está lloviendo/
(5) /no voy al cine y llueve/
(6) /voy al cine luego está lloviendo/
(7) /voy al cine y no llueve/
(8) /no voy al cine y no llueve/
(9) /voy al cine y llueve/

****

Estas observaciones parecen indicar que, al menos en castellano /sólo si/ no se debería emplear de forma aislada y por ello mismo tal vez nos deberíamos pensar bien si al /si y sólo si/ que aparece con tanta profusión en nuestra literatura matemática no le deberíamos dar otra forma.

3.7
El uso de las flechas para las implicaciones

Probablemente la manera más clara para el matemático de representar simbólicamente una implicación del tipo /A implica B/, es decir /si A entonces B/, es el uso de una flecha, /A   B/, que nos recuerda con claridad que, a fin de demostrar tal cosa, debemos partir de A y llegar a B. La misma implicación se puede representar /B   A/, aunque no es lo usual.

Análogamente la doble implicación /A si y sólo si B/ se representa mediante una doble flecha /A   B/, que equivale, naturalmente, a /(A   B) y (A   B)/

4.
Proposiciones compuestas
4.1 Las tablas de verdad

Probablemente serán pocos los matemáticos que en su trabajo cotidiano hagan algún uso de las tablas de verdad que vamos a examinar a continuación, pero sí se puede afirmar que constituyen un magnífico instrumento para la investigación lógica y para una posible automatización de los procesos demostrativos. Se presentan aquí a modo de complemento interesante, pero no aconsejaría a ningún estudiante de matemáticas que tratara de acercarse al trabajo usual en este campo a través del manejo de las tablas de verdad.

Como hemos visto al introducir los conectores lógicos entre las proposiciones A y B, el valor de la expresión construída, de verdad, V, o de falsedad, F, a partir de los valores V, F, de las expresiones que intervienen en ella,se ha impuesto en algunos casos de manera un tanto convencional. Los valores que hemos introducido se pueden señalar esquemáticamente mediante las llamadas tablas de verdad:

A	no-A
V	F
F	V

A	*B*	*A* y *B*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

A	*B*	*A* o *B*
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

A	*B*	*A* *B*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

A	*B*	*A* *B*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

que se interpretan fácilmente. A través de estas tablas se pueden determinar, procediendo por pasos, los valores de cualquier expresión lógica compuesta por varios conectores del tipo de los introducidos arriba. Por ejemplo tratamos de calcular la tabla de verdad de la siguiente expresión que llamaremos E: /si (A o B) entonces (A y C)/. Es decir se trata de determinar, según que A, B, C sean verdaderas o falsa, la verdad o falsedad de E.

Para ello partimos de las posibles distribuciones de los valores V, F, de A, B, C. Son 8. A continuación vamos formando la tabla de verdad de /A o B/, /A y C/, y con ellas, finalmente, de E. Se pueden disponer los cálculos de la forma siguiente:

A	*B*	*C*	*A* o *B*	*A* y *C*	*A* o *B* *A* y *C*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*

Puesto que todos estos cálculos se reducen a operaciones automáticas, los actuales programas de cálculo simbólico realizan este trabajo rutinario directamente como si se tratara de una operación numérica o algebraica. Por ejemplo, con DERIVE podemos escribir

TRUTH_TABLE(a,b,c, (a OR b) imp (A AND C))

y obtenemos directamente la última columna

Y si se quiere, se pueden tener todos los pasos intermedios que hemos realizado antes con cierto trabajo

Como aquí se observa, la expresión E es falsa en cuatro de los ocho casos posibles, luego su verdad depende de la verdad o falsedad de las expresiones elementales que contiene.

4.2
Las leyes lógicas

Cuando una expresión del tipo de las que aparecen en el apartado anterior toma solamente valores V para cualesquiera valores de las expresiones elementales que la constituyen, entonces se llama una ley lógica. Es decir, una ley lógica es una proposición verdadera cualquiera que sea el valor de verdad o falsedad de sus componentes. Por ejemplo, las siguientes expresiones tienen las tablas de verdad que se indican, y así son leyes lógicas:

(1) Ley de no-contradicción: no-(A y no-A)

A	no-*A*	*A* y no-*A*	no-(*A* y no-*A*)
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*

(2) Ley del tercio excluso: A o no-A

A	no-*A*	*A* o no-*A*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*

(3) Comprueba (o bien míralo en las notas al final del capítulo) que la siguiente expresión es una ley lógica

(A implica B) equivale a ((A y no-B) implica (P y no-P))
es decir
A *B* *A* y no-*B* *P* y no-*P*

La expresión viene a afirmar que demostrar que A implica B (que es el ejercicio normal en matemáticas) es equivalente a demostrar que a partir de A y no-B se llega a una contradicción, a un absurdo cualquiera. Esta forma de proceder para demostrar algo constituye el método que tradicionalmente se llama ”por reducción al absurdo”. Más adelante, en el siguiente capítulo, tendremos ocasión de practicarlo y veremos las ventajas y desventajas que esta forma de proceder puede presentar.

(4) Método de demostración por contraposición:

(*A* implica *B*   equivale a (no-*B* implica no-*A*
es decir
A   *B*   no-*B*   no-*A*

Afirma que demostrar que A implica B es lo mismo que demostrar que no-B implica no-A. Muchas veces también este método tiene ventajas apreciables y resultan demostraciones más sencillas. Se deja como ejercicio la comprobación de que se trata, efectivamente, de una ley lógica.

****

Ejercicio

Comprueba, construyendo la tabla de verdad, que

A   *B*   no-*B*   no-*A*

es efectivamente una ley lógica.

****

Ejercicio

Comprueba, construyendo las tablas de verdad, que son leyes lógicas:

(a) no(A o B)   (no-A) y (no-B)

(b) (o bien A o bien B)   ((A y no-B) o (no-A y B)

(c) no-(o bien A o bien B)   (A y B) o (no-A y no-B))

****

5.
Los cuantificadores lógicos

En el lenguaje ordinario, al igual que en el matemático, estamos constantemente haciendo alusión a elementos de ciertas colectividades, conjuntos, sin que necesariamente interese su singularidad concreta, es decir, aludimos a ellos como elementos de un conjunto, pero no como individuos. Vamos a considerar los siguientes ejemplos del lenguaje natural señalados entre barras en las siguientes expresiones, que se pueden suponer referidas a una ciudad concreta.

(1) /Algún loco habrá que cada día lea todos los periódicos/.

(2) /Algún loco habrá cada día que lea todos los periódicos/.

(3) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /cada uno lee algún periódico cada día/.

(4) /Cada día hay algún periódico que todo el mundo lee/.

(5) Somos muy brutos en este pueblo, pero al menos /todos los días habrá alguien que lea algún periódico./

(6) Es una ciudad de maniáticos. /Todos leen todos los periódicos cada día/.

(7) Aquí sí que somos bestias, pero al menos /hubo un día en que alguien leyó algún periódico/.

Incluso jugando con un número bien limitado de colectivos, aquí tres, ciudadanos, periódicos y días, aparece, con la entrada de los vocablos /algún/ y /todo/ y teniendo en cuenta su orden, una gran cantidad de expresiones todas ellas diferentes. Las de arriba no agotan todas las posibilidades, por supuesto. Estos vocablos son los cuantificadores lógicos también omnipresentes en el discurso matemático y que conviene habituarse a manejar correctamente.

La importancia del orden en que se emplean es evidente cuando los cuantificadores son distintos. Bien miradas, las dos expresiones siguientes significan algo totalmente diferente:

(a) /en cada uno de los cuadros de este museo aparece alguna persona/

(b) /alguna persona aparece en cada uno de los cuadros de este museo/

Naturalmente que en el lenguaje cotidiano corregimos, mediante nuestra intuición del contexto, posibles incongruencias que resultan obvias y así nos entendemos suficientemente sin necesidad de practicar una exacta pedantería fuera de lugar. Pero en matemáticas el contexto no nos suele ayudar tan eficazmente y por ello es necesario que nos atengamos tenazmente a ciertas normas.

En nuestros ejemplos (1) y (2) de la colección de arriba aparecen los mismos cuantificadores, pero la sutil diferencia que introduce la posición del ”que” hace que se deban interpretar en orden distinto y que den lugar a significados bastante diferentes. En (1) se afirma que hay un loco (el mismo) que cada día lee todos los periódicos, mientras que en (2) se afirma que cada día hay un loco (posiblemente diferente cada día) que lee todos los periódicos.

Si consideramos el ejemplo (3), podemos, sin cambiar el cuantificador de cada elemento, sino sólo su orden, obtener expresiones con un significado distinto. Así obtenemos:

(8) Esta ciudad está dominada por un diario. /Todo el mundo lo lee todos los días/.

(9) Aquí todos somos muy fieles. /Cada uno lee siempre el mismo periódico/, el suyo de siempre.

Multitud de definiciones, teoremas, demostraciones matemáticas no son otra cosa que cadenas de expresiones ligadas por medio de cuantificadores lógicos. Unos cuantos ejemplos:

El número L es el límite de $f\ x$ cuando x tiende al número c si y sólo si se verifica la siguiente propiedad: Para cada 0 existe algún 0 tal que para cada x que satisface 0 $|x \quad c|$ se verifica $|f\ x \quad f\ c\ |$.

Que la función f : R R es uniformemente continua significa que para cada 0 existe algún 0 tal que para cada x, y R que verifican $|x \quad y|$ se tiene $|f\ x \quad f\ y\ |$.

La destreza en el manejo de los cuantificadores lógicos es esencial para poder progresar adecuadamente hacia el dominio de ciertas zonas un tanto sutiles del análisis matemático y de otros campos. A ello vamos a dedicar unas cuantas consideraciones.

Dada la ubicuidad de los cuantificadores lógicos y la complejidad de expresión que, al acumularse, pueden producir, es conveniente hacerse con un sistema de representación simbólica adecuado, no para usarlo de forma indiscriminada, sino para los casos en que su uso nos pueda proporcionar una cierta eficacia superior ante las complicaciones.

El símbolo

Las expresiones /para todos los *x* de *P* /, /para cada *x* de *P* /, /para cada *x* con la propiedad $S\ x$ /, y equivalentes se simbolizan con ayuda del símbolo , que podemos convenir en leer siempre ”para cada”. Así $x, x \quad P$

$$x, x \quad P$$

se leerá ”para cada *x* en *P*” y

$$z, z \quad 4$$

se leerá ”para cada *z* menor que 4 ”.

El símbolo

Análogamente, las expresiones /existe un *m* en *P* /, /para algún *m* de *P* /, /para algún *m* con la propiedad $S\ m$ /, se simbolizan con ayuda del símbolo , que podemos convenir en leer siempre ”para algún” (se suele leer también ”existe”, pero por homogeneidad con el ”para cada” correspondiente al símbolo parece más razonable adoptar aquí ”para algún”). Así,

$$m, m \quad P$$

se leerá ”para algún *m* en *P*”, y

$$m, m \quad 2$$

se leerá ”para algún *m* mayor que 2”.

Enlace de los cuantificadores

Los cuantificadores se presentan en el discurso matemático enlazados ordenadamente, siendo en ocasiones el orden, como ya hemos visto, extraordinariamente importante. Para simbolizar el enlace de una forma homogénea, ordenada y de modo que la expresión simbólica se pueda traducir mecánicamente a una fraseología cercana al lenguaje natural proponemos representar dicho enlace mediante el símbolo que leeremos siempre ”se verifica que”. Por ejemplo,

(1) /algún loco habrá que lea todos los periódicos cada día/

se puede expresar simbólicamente, si representamos por *M* el conjunto de las personas de la ciudad que consideran nuestros ejemplos anteriores, por *P* el conjunto de los periódicos y por *D* el conjunto de los días, mediante

(1) $m, m \quad M \quad p, p \quad P \quad d, d \quad D \;\; m$ lee p en d

que se lee

”para alguna persona *m*, se verifica que, para cada periódico *p*, se verifica que, para cada día *d*, se verifica que *m* lee *p* en *D*”

Del mismo modo

(2) /cada día habrá algún loco que lea todos los periódicos/

se simboliza mediante

(2) $d, d \quad D \quad m, m \quad M \quad p, p \quad P \;\; m$ lee p en d

que se lee

”para cada día *d* ,se verifica que, para alguna persona *m*, se verifica que, para cada periódico *p*, se verifica que *m* lee *p* en *d* ”

El castellano que resulta no es muy satisfactorio desde el punto de vista estético, pero sí claro y con sentido, y tiene la ventaja de ser la transcripción mecánica, siguiendo las convenciones propuestas, de los símbolos imtroducidos. Por otra parte, como veremos a continuación, tiene la ventaja de que la negación de una expresión como las anteriores escrita en símbolos se realiza de modo automático, sin necesidad de atender una vez más al sentido de la frase. Esto se entenderá mejor con lo que sigue más abajo.

****

Ejercicio

Escribe en símbolos cada una de las expresiones (1)-(9) que han ido apareciendo en esta sección.

****

Ejercicio

Escribe la definición de límite que se ha propuesto arriba utilizando los símbolos aquí introducidos.

****

Ejercicio

Escribe la definición de continuidad uniforme que se ha propuesto anteriormente mediante los símbolos aquí introducidos.

****

Ejercicio

Traduce a palabras la siguiente expresión en símbolos:

$n \quad \mathbb{Z}, n \quad 2 \quad x, y, z \quad \mathbb{Z}^3, x^n \quad y^n \quad z^n \;\; xyz \quad 0$

Tal vez puedas reconocer que se trata del famoso teorema de Fermat-Wiles.
****

Negación de una expresión con cuantificadores

¿En qué ocasiones puede uno utilizar con provecho el simbolismo introducido? Como veremos un poco más adelante, en muchos de los procesos de demostración aparecen expresiones en que intervienen cuatro o cinco cuantificadores lógicos enlazados y viene bien (por ejemplo para la demostración por contraposición) proceder a formar la negación de tal expresión. Esta operación se convierte en un automatismo rutinario mediante el simbolismo propuesto.

Observemos primero que la negación de la expresión

/para cada p P se verifica S p /

es sencillamente

/para algún p P se verifica no-S p /

Análogamente, la negación de la expresión

/para algún x W se verifica M x /

es

/para cada x W se verifica no-M x /

Es decir, la negación de

$$p \quad P \;\; S\, p$$

es

$$p \quad P \;\; \text{no-}S\, p$$

y la negación de

$$x \quad W \;\; M\, x$$

es

$$x \quad W \;\; \text{no-}M\, x$$

Como se observa, se cambia por o bien por y a continuación se forma la negación de lo que viene tras . Esto, aplicándolo reiteradamente, nos proporciona la regla clara y automática para obtener la negación de una cadena de cuantificadores complicada con toda facilidad. Por ejemplo, para la expresión (1) del comienzo de esta sección,

(1) /algún loco habrá que lea todos los periódicos cada día/

que, recordemos, se puede escribir

$$m \quad M \quad p \quad P \quad d \quad D \;\; m \text{ lee } p \text{ en } D$$

su negación no-(1) será

$$m \quad M \quad p \quad P \quad d \quad D \;\; m \text{ no lee } p \text{ en } D$$

que se lee
/para cada persona *m* se verifica que para algún periódico *p* se verifica que para algún día *d* se verifica que *m* no lee *p* en *d* /
que en lenguaje más cercano al natural es
/cada uno pasa de leer alguno de los periódicos algún día/

La regla para la negación de una proposición que es una cadena de cuantificadores lógicos como las de arriba es:

Se cambia cada símbolo por y cada símbolo por y se niega la expresión detrás del último símbolo .

****
Ejercicio
(a) Escribe en símbolos la negación de cada una de las expresiones (1)-(9) que han aparecido en esta sección.
(b) Expresa con una frase del lenguaje ordinario lo que significa.
****
Ejercicio
(a) Expresa cada una de las expresiones entre barras que siguen (10) y (11) de forma simbólica.
(b) Expresa a continuación su negación simbólicamente.
(c) Escribe esta negación en lenguaje normal con una frase clara.

(10) Fue tal el notición que /aquel día todo el mundo leyó todos y cada uno de los periódicos/.
(11) ”La Ciudad” se llevó la exclusiva y así /este día hubo un periódico que fue leído por todo el mundo/.
****

Notas complementarias

1. **Sobre la definición implícita**
Buscar los Grundlagen der Geometrie

2. **Sobre la implicación material**
La razón de la elección de los valores de verdad para la implicación material se entiende mejor así: Lo importante en la implicación *A* *B* es que no se puede dar a la vez que A sea verdad y que B sea falso, es decir, lo que interesa al matemático es la proposición /no- *A* y no-*B* / cuya tabla de verdad, una vez que hemos fijado las tablas de verdad de los conectores /no/, /y/ y /o/ queda determinada y es precisamente la misma en la que hemos convenido para la proposición /*A* *B*/, es decir

A	B	$A \quad B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Así es claro que si queremos una tabla de valores para este conector consistente con los otros, hemos de aceptar la tabla propuesta, a pesar de las aparentes paradojas y situaciones contraintuitivas. No hay otra alternativa mejor si queremos aprovecharnos de la eficacia que proporciona el disponer de una tabla de valores, sobre todo a la hora de automatizar el cálculo de los valores de verdad para casos complicados.

Otra línea de pensamiento nos conduce al mismo resultado. Según el sentido utilizado normalmente en matemáticas para la implicación /si A entonces B/, ha de suceder por lo pronto que:

(1) cuando A tiene valor V, B tiene valor V

(2) cuando B tiene valor F, A tiene valor F

es decir, a estas situaciones hay que asignarles el valor de verdad.

Miramos ahora las cuatro posibilidades siguientes que esto nos deja para elegir una tabla de verdad para /si A entonces B/:

1

A	B	$A \;_{1} B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

, 2

A	B	$A \;_{2} B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

, 3

A	B	$A \;_{3} B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

, 4

A	B	$A \;_{4} B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Resulta que:

La tabla (1) corresponde a la noción matemática de equivalencia, es decir ”A es verdad cuando B es verdad y A es falso y cuando B es falso” y esto es distinto de la noción matemática usual de implicación

La tabla (2) es la tabla de verdad de /A y B/

Para elegir una tabla de de verdad para la implicación nos quedan (3) y (4). Si elegimos (3) entonces resulta que la proposición /(A $\;_{3} B$ y ($B \;_{3} A$ / tiene la tabla

A	B	$A \;_{3} B$	$B \;_{3} A$	$A \;_{3} B$ y $B \;_{3} A$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

y esto no corresponde a la noción matemática de equivalencia entre A y B como debería ser.

Por lo tanto sólo nos queda la opción (4), que efectivamente no tiene el inconveniente de la anterior, ya que ahora la tabla de / $A \;_{4} B$ y $B \;_{4} A$ /

A	B	$A\ _4 B$	$B\ _4 A$	$A\ _4 B$ y $B\ _4 A$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

nos proporciona el sentido correcto de la equivalencia matemática ”A es verdad cuando B es verdad y A es falso cuandoB es falso” que es ”A es verdad exactamente cuando B es verdad y A es falso exactamente cuando B es falso”.

3. **La reducción al absurdo**.

Para ver que A B es equivalente a A y no-B P y no-P , es decir que demostrar que A implica B es lo mismo que demostrar que de (A y no-B) se deduce una contradicción cualquiera (P y no-P) (método de demostración por reducción al absurdo) se puede proceder como sigue:

La implicación A B tiene la tabla siguiente

A	B	A B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Construimos la tabla de verdad de la otra expresión por pasos

A	B	no-B	A y no-B
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Por otra parte

P	no-P	P y no-P
V	F	F
F	V	F

y con ello obtenemos

A y no-*B*	*P* y no-*P*	*A* y no-*B*		*P* y no-*P*
F	*F*		*V*	
V	*F*		*F*	
F	*F*		*V*	
F	*F*		*V*	

y finalmente

A		*B*	*A* y no-*B*		*P* y no-*P*	*A*	*B*	*A* y no-*B*	*P* y no-*P*
	V			*V*				*V*	
	F			*F*				*V*	
	V			*V*				*V*	
	V			*V*				*V*	

con lo que queda demostrado que

A *B* *A* y no-*B* *P* y no-*P*

es una ley lógica, y con ello lo que se pretendía demostrar.

Sugerencias mías para el control de leng. septiembre 2002

(a) Considera la proposición siguiente que llamaremos P

”Para algún número entero e impar c existe un entero n tal que se tiene $n^3 \quad 3n \quad 5c \quad 0$”

(1) Escríbe P utilizando los símbolos para los cuantificadores lógicos.

(2) Escribe, utilizando los símbolos para los cuantificadores lógicos, la negación de la expresión simbólica que has obtenido en (1).

(3) Escribe en palabras normales la expresión en símbolos que has obtenido en (2).

(4) ¿Es la proposición P verdadera o falsa?

(5) Presenta una demostración de tu respuesta en (4).

(a´) Considera la proposición siguiente que llamaremos Q

”Para algún entero n que no es múltiplo de 3 se tiene para cada entero k, $n^2 \quad 1 \quad 3k \quad 0$”

(1) Escríbe Q utilizando los símbolos para los cuantificadores lógicos.

(2) Escribe, utilizando los símbolos para los cuantificadores lógicos, la negación de la expresión simbólica que has obtenido en (1).

(3) Escribe en palabras normales la expresión en símbolos que has obtenido en (2).

(4) ¿Es la proposición Q verdadera o falsa?

(5) Presenta una demostración de tu respuesta en (4).

LOS EJERCICIOS DEL LABORATORIO 2002

center

Problemas sobre conectores lógicos

/NO/

2. Considera la expresión siguiente:

/De ninguna manera iré jamás ni contigo ni con tu padre a Berlín./

Construye otra equivalente con negaciones más simples, eliminando el énfasis retórico.

3. Considera la expresión:

/En ninguna oficina de este maldito país, ni en Agosto, ni en ninguna otra época, nadie está nunca ni dos horas seguidas en su sitio./

Quita la exageración retórica construyendo una frase equivalente con el mínimo número de negaciones.

/Y/

5. Aclara el sentido de las siguientes frases con una más explícita.

- **a.** /No mandé que Juan y Pedro lo hicieran. Lo que ordené fue que Juan o Pedro lo hicieran./
- **b.** /Ordené que lo hicieran Pedro y Juan. No dije que lo hicieran Pedro o Juan./

6. Explica la posible distinción del lenguaje natural entre las dos frases siguientes: /Iré y lo haré./ Lo haré e iré./

7. (*) Construye una frase sencilla y clara equivalente a la siguiente: /No es verdad que tu eres brasileño y que tu padre es catalán./
8. Construye una frase sencilla equivalente a /No es verdad que tu eres brasileño ni que tu padre es catalán./
9. Construye una frase sencilla equivalente a /No es verdad que tu no eres irlandés ni que tu hermano es inglés./

/O/, /O BIEN... O BIEN/

11. En el escaparate de la librería de la universidad aparece escrito:

/Nuestros clientes en posesión de carnet de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15 % de descuento./

Explica el significado de esta frase.

12. Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque de atracciones y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice /No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque de atracciones./ Explica lo que el padre quiere decir con toda claridad. ¿Tiene este /o/ el mismo significado que en el ejercicio anterior?

¿A cuál de los dos significados se acerca el del /o/ de las matemáticas?

13.

(*) Supongamos que te llamas Gabriel. ¿Qué te parecería presentarte del siguiente modo: /Me llamo Pedro o Gabriel/?

¿Es correcto decir en el lenguaje matemático /3 es menor o igual que 5/? ¿Es correcto decir /5 es menor o igual que 5/?

14. Si a mi pregunta sobre cuándo se marcha, mi amigo me responde /El sábado o el domingo/ y después me entero de que ese mismo día tenía en su bolsillo su billete para el sábado, ¿qué pensarías de mi amigo?

15. ¿Cómo te suena en el lenguaje ordinario la expresión /5 es mayor que 7 o Madrid tiene más de 3 millones de habitantes/? Si se trata de lenguaje matemático, te parece que es ¿verdadera o falsa?

16. (*) Pepe dice: /Ordené que viniera Pedro o Juan./ Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?

17. Julio dice: /Ordené que vinieran o bien Pedro o bien Juan./ Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?

18. Construye una frase explicativa equivalente a: /No es verdad que vinieran Pedro o Juan./

19. (*)Construye una frase explicativa equivalente a: /No es verdad que viniera o bien Pedro o bien Juan./

/SI... ENTONCES/

21. Dijo: /Voy al Banco. Si está abierto traigo 60 euros./

Viene con 60 euros. ¿Qué deduces?

Viene sin un euro. ¿Qué deduces?

22. Examina la frase: /Si Miguel me invita a su casa, voy./

Miguel no me invita y voy.

Miguel me invita y no voy.

¿Qué piensas de ambas situaciones? ¿Son coherentes con la primera frase?

23. (*) /Si el Granada no gana el partido el domingo, Pepe será muy infeliz./

Resulta que el domingo gana el Granada y encontramos a Pepe, por la noche, totalmente infeliz. La verdad de esta proposición, ¿es compatible con esta situación?

24. Quieres demostrar que /A implica B/ es falso. ¿Cómo procederías?

- **a.** Demostrando que B es falso.
- **b.** Demostrando que A es falso.
- **c.** Demostrando que B es falso y que A es verdadero.
- **d.** Demostrando que B es verdadero y que A es falso.

e. Demostrando que B es falso y que A es falso.

25. (*) Tu tarea es demostrar que A implica B y sabes que B es falso. ¿Qué tratarás de demostrar y por qué?

a. Que A es verdadero.

b. Que A es falso.

Proposiciones matemáticas

27. ¿Cuáles de las siguientes cosas son proposiciones matemáticas y por qué?

a. $ax^2 \quad bx \quad c \quad 0$

b. $\dfrac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$

c. El triángulo XYZ es semejante al triángulo RST.

d. $3 \quad n \quad n^2$

e. $\text{sen}\,\frac{}{2} \qquad \text{sen}\,\frac{}{4}$

f. Para cada ángulo t se tiene $\text{sen}^2 t \quad \cos^2 t \quad 1$

28. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones matemáticas son verdaderas?

a. La raíz cuadrada de cualquier número entero es un número real no negativo.

b. Existe un ángulo t tal que $\text{sen}\, t \quad \cos t$.

c. (*) Si $x \quad 1$, entonces $x^2 \quad 1$

29. Para cada una de las proposiciones siguientes identifica cuál es la hipótesis y cuál la conclusión.

a. Si el triángulo rectángulo ABC, de lados a, b, c, siendo a la hipotenusa, es tal que su área es $\frac{a^2}{4}$, entonces el triángulo ABC es isósceles.

b. n es un número entero implica n^2 es un número entero.

c. (*) Si a, b, c, d, e, f son números reales con la propiedad $ad \quad bc \quad 0$, entonces el sistema de ecuaciones $ax \quad by \quad e, cx \quad dy \quad f$ tiene una única solución.

d. La suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n\ n \quad 1}{2}$.

e. Si r es un número real y satisface $r^2 \quad 2$ entonces r es irracional.

f. Si p y q son reales positivos que verifican $\sqrt{pq} \quad \frac{p \quad q}{2}$, entonces $p \quad q$.

g. (*) Si x es un número real, el valor mínimo de $x\ x \quad 1$ es mayor o igual que 1/4.

Sobre la proposición /Si A entonces B/

31. Una de las situaciones que más aparecen en Matemáticas es demostrar que es cierta la afirmación "Si A entonces B", a veces escrita $A \quad B$ y leída "A implica B". Escribe una tabla de verdad sobre esta implicación; es decir, analiza la verdad o falsedad de $A \quad B$ según la verdad o falsedad de A y B completando la siguiente tabla:

A	B	$A \quad B$
Verdadera	Verdadera	
Verdadera	Falsa	
Falsa	Verdadera	
Falsa	Falsa	

32. (*) Imagina que la siguiente afirmación es verdadera: "Si salió nublado el 5 de Enero de 1987, yo soy el Papa". ¿Qué puedes decir sobre el 5 de Enero de 1987?

Equivalencias

34. (*) Supongamos que n es un número natural. Decide si la proposición /n^2 es par si y sólo si n es par/ es verdadera o es falsa. Justifica tu respuesta.

35. Supongamos que r es un número real. La proposición /r^2 es racional si y sólo si es r es racional/ ¿es verdadera o es falsa? Demuéstralo.

36. Sean A y B dos matrices 2 2. ¿Es cierto que AB A^2 si y sólo si A B? Justifica tu respuesta.

37. Sea a un número real. Decide si la condición a^2 a es:

a. necesaria,

b. suficiente,

c. necesaria y suficiente;

para que a^3 a^2. ¿Por qué?

38. Se consideran dos números reales a y b. Marca cada casilla del siguiente cuadro con un número del 1 al 5, de acuerdo con el convenio que se indica al final:

	a b Q	a b Q	ab Q	ab Q
a Q, b Q				
a Q, b Q				
a Q, b Q				

1 La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba.

2 La condición de la izquierda hace que la condición de arriba se cumpla sólo si a 0.

3 La condición de la izquierda hace que la condición de arriba no se cumpla nunca.

4 La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba siempre que a 0.

5 La condición de la izquierda hace que la condición de arriba se cumpla en algunos casos particulares pero no en otros.

En los ejercicios ref: int-par - ref: der-cont , demuestra si se tiene alguna de las situaciones siguientes:

A) 1 es suficiente para 2 pero no necesario.

B) 1 es necesario para 2 pero no suficiente.

C) 1 y 2 son equivalentes.

40. Si f es una función continua,

1: f x f x ; 2: $^{1}_{1} f\ x\ dx$ 2 $^{1}_{0} f\ x\ dx$.

41. Si X e Y son matrices n n y 0 es la matriz nula de orden n,

1: XY YX 0; 2: X 0 ó Y 0

42. Si f es una función de R en R

1: $\lim_{x\ a} f\ x$ $f\ a$; 2: $\lim_{x\ a} \dfrac{f\ x \quad f\ a}{x \quad a}$ 2

Cuantificadores lógicos, sus concatenaciones y sus negaciones

44. Sean

M el conjunto de todas las personas de una cierta ciudad.

P el conjunto de todos los periódicos que se publican en esa ciudad.

D el conjunto de todos los días del año.

Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos **para cada** y **para algún**, cada una de las siguientes afirmaciones entre barras:

- **a.** /Algún loco habrá que cada día lea todos los periódicos./
- **b.** /Algún loco habrá cada día que lea todos los periódicos./
- **c.** (*) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /cada uno lee algún periódico cada día./
- **d.** /Cada día hay algún periódico que todo el mundo lee./
- **e.** (*) Somos muy brutos en este pueblo, pero al menos /todos los días habrá alguien que lea algún periódico./
- **f.** Es una ciudad de maniáticos. /Todos leen todos los periódicos cada día./
- **g.** (*) Aquí sí que somos bestias, pero al menos /hubo un día en que alguien leyó algún periódico./
- **h.** Esta ciudad está dominada por un diario. /Todo el mundo lo lee todos los días./
- **i.** Aquí todos somos muy fieles. /Cada uno lee siempre el mismo periódico/, el suyo de toda la vida.
- **j.** Fue tal el notición que /aquél día todo el mundo leyó todos y cada uno de los periódicos./
- **k.** ”La Ciudad” se llevó la exclusiva y así /este día hubo un periódico que fue leído por todo el mundo./

45. Sea T el conjunto de los números reales menores que 1, es decir $T \quad ,1\ .$

- **a.** ¿Es cierta la siguiente afirmación?

  Existe un número real $M \quad 0$ tal que para cada elemento x del conjunto T, se verifica $x \quad M$.
- **b.** ¿Hay alguna diferencia entre la anterior afirmación y ésta?

  Para cada elemento x del conjunto T, existe un número real $M \quad 0$ tal que $x \quad M$.

46. (*) En el ejercicio anterior has visto que al cambiar el orden entre *existe un número real* y *para cada elemento x del conjunto T* has obtenido dos proposiciones que, en ese caso, son ambas verdaderas. Pero ¿ocurre esto siempre? Analiza las siguientes proposiciones:

- **a.** Para cada número real x con $0 \quad x \quad 1$, existe un número real y con $0 \quad y \quad 1$ tal que $x \quad y \quad 1$.
- **b.** Existe un número real y con $0 \quad y \quad 1$ tal que, para cada número real x con $0 \quad x \quad 1$, se verifica que $x \quad y \quad 1$.

¿Son las dos verdaderas?

47. Explica si en cada uno de los siguientes pares de proposiciones a y b son las dos verdaderas o las dos falsas o una verdadera y otra falsa:

(*) **(a)**

- **i.** Para cada número real x con $0 \quad x \quad 1$ y cada número real y con $0 \quad y \quad 2$, se verifica $2x^2 \quad y^2 \quad 6$.
- **ii.** Para cada número real y con $0 \quad y \quad 2$ y cada número real x con $0 \quad x \quad 1$, se verifica $2x^2 \quad y^2 \quad 6$.

(b)

- **i.** Para cada número real x con $0 \quad x \quad 1$ y cada número real y con $0 \quad y \quad 2x$, se verifica $2x^2 \quad y^2 \quad 6$.
- **ii.** Para cada número real y con $0 \quad y \quad 1$ y cada número real x con $0 \quad x \quad 2y$, se verifica $2x^2 \quad y^2 \quad 6$.

En los siguientes ejercicios se te va a pedir que niegues la proposición P, es decir, que escribas la proposición contraria de P, o no P, de manera que no aparezca explícitamente la palabra **no**.

49. (*) P: Para cada número real x 0 se verifica que x^2 x 0. ¿Cuál es verdadera: P o no P?

50. P: Existe un número real x 0 para el que x^2 x 0. ¿Cuál es verdadera: P o no P?

51. (*) P: Para cada número real x 0 que verifique 1 x 1, existe un número real y con 1 y 1 tal que x^2 y^2 1. ¿Cuál es verdadera: P o no P?

52. P: Existe un número real x con 1 y 1 tal que para cualquier número y con 1 y 1 se verifica que x^2 y^2 1. ¿Cuál es verdadera: P o no P?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS CON ASTERISCO ( )

vskip 0,5 cm

ref: frase

No (A y B) es no A o no B. Tú no eres brasileño o tu padre no es catalán.

ref: Gabriel

a) En el lenguaje matemático no es falso. En lenguaje normal es no querer decir como me llamo.

b) Las dos cosas son correctas y aparecen en el lenguaje matemático.

ref: Pepe

Pues sí, pero bastaba que viniera uno de los dos para que se hubiera cumplido.

ref: Juan

/o bien A o bien B/ es lo mismo que /(A y no B) o (B y no A)/.

No (o bien A o bien B) es [no (A y no B)] y [no(B y no A)] es decir:

(no A o B) y (no B o A)

(no vino Pedro o vino Juan) y (no vino Juan o vino Pedro), es decir:

(no vino Pedro y no vino Juan) o (vino Pedro y vino Juan)

ref: Granada

Sí es compatible. No se dijo qué pasaría si el Granada ganaba. Afirmar A B es compatible con **no *A* y *B*** y con **no *A* y no *B***.

ref: tarea Puesto que A B es equivalente a **no** B **no** A, tengo que demostrar que A es falso.

ref: x<1

Es falso, ya que si x 2 1 entonces x^2 2 ^{2} 4 1.

ref: a,b

Hipótesis a, b, c, d, e, f R y ad bc 0

Tesis $\left\{\begin{array}{l} ax \quad by \quad e \\ cx \quad dy \quad f \end{array}\right.$ tiene solución única.

ref: minimo Hipótesis x es real

Tesis $x\ x \quad 1 \qquad \frac{1}{4}$

ref: imagina

Si el que lo dice es el Papa no se puede decir nada del 5 de Enero.

Si el que lo dice no es el Papa entonces el 5 de Enero no salió nublado.

ref: supongamos Es verdadera pues

Si n^2 es par entonces n es par, pues si n fuera impar n^2 lo sería también, ya que $2k \quad 1^{\,2} \quad 4k^2 \quad 4k \quad 1$.

Si n es par, entonces $n \quad 2k$ y, así, $n^2 \quad 4k^2 \quad 2\ 2k^2$ que es par.

ref: ciudad

$d \quad D| \quad m \quad M| \quad p \quad P|m$ lee p en d.

ref: brutos $d \quad D| \quad m \quad M| \quad p \quad P|m$ lee p en d.

ref: bestias $d \quad D| \quad m \quad M| \quad p \quad P|m$ lee p en d.

ref: T

a) Es cierta.

b) Es falsa.

ref: para a) 1 y 2 dicen lo mismo y son verdaderas.

ref: PF

P falsa.

ref: PV

P es verdadera.