Capítulo 2

Sobre la demostración

Esquema

1. La demostración en matemáticas

2. Métodos de demostración

2.1 Demostración ”marcha adelante”. Ejemplos y ejercicios.
2.2 Demostración ”marcha atrás”. Ejemplos y ejercicios.
2.3 Demostración ”supongamos que no”. Ejemplos y ejercicios.
2.4 Demostración por reducción al absurdo. Ejemplos y ejercicios.
2.5 Demostración por inducción. Ejemplos y ejercicios.
2.6 Demostración por distinción de casos. Ejemplos y ejercicios.
2.7 Demostración por contraejemplo. Ejemplos y ejercicios.
2.8 El método de descenso de Fermat. Ejemplos y ejercicios.

3. Ejercicios variados

1. La demostración en matemáticas

Como hemos visto en el capítulo anterior, la demostración es una de las actividades cotidianas importantes en matemáticas. Con ella se trata de poder asegurarnos de que lo que afirmamos es cierto, es decir, es deducible a partir de los hechos y afirmaciones iniciales de una teoría a través de implicaciones, a veces mediante cadenas bien complejas de implicaciones. Para llegar a construir la demostración de una cierta firmación, existen, como veremos, muy diversos caminos, diferentes métodos.

En este capítulo se presenta una breve orientación sobre algunos de los tipos de demostración más usuales en el quehacer matemático. Es bien claro que el ejercicio de la demostración de proposiciones matemáticas, como el de la resolución de problemas, implica tal riqueza de actividades diferentes que no se puede esperar en absoluto poder dar normas que las abarquen.

Como en la resolución de problemas, también en el ejercicio de la demostración sólo se llega a desarrollar una cierta capacidad mediante la dedicación reflexiva constante y prolongada a la demostración por uno mismo de proposiciones cada vez más complejas y mediante la observación atenta de las demostraciones que uno mismo logra construir y de las que otros matemáticos han elaborado.

¿Cómo se hace para demostrar? Muy frecuentemente se trata de demostrar que si se verifica A entonces se verifica B. A veces la tarea puede no tener esta formulación explícita. Se propone, por ejemplo: *Demostrar que* $\sqrt{2}$ *no puede ser igual a un número racional*, *es decir a un número de la forma a/b*, *siendo a y b números naturales*. Se presupone aquí que A es el conjunto de conocimientos obvios, admitidos o ya establecidos acerca de lo que es una fracción y acerca de lo que es la raíz cuadrada.

Otras veces se dice, por ejemplo, algo así: *Sea I* a, b *un intervalo de* $\mathbb{R}$ *cerrado y acotado y f una función continua de I a* $\mathbb{R}$. *Demostrar que*... Es claro que aquí A es ese conjunto de condiciones dado más todas las proposiciones ya admitidas o establecidas anteriormente sobre los elementos del enunciado, función, continuidad, etc.

¿Cómo empezar? Comienza preguntándote si sabes qué significan todos los términos de los que se habla en A y en B. Si alguno no te resulta familiar, entérate mejor de qué va.

A continuación trata de entender las relaciones más importantes de los elementos de A y B entre sí y procura que se te hagan presentes en tu mente las principales ideas relacionados con ellos provenientes de tu estudio previo, de tus experiencias anteriores. Trata de recordar, al menos vagamente, los contextos, las situaciones en las que suelen encontrarse estos elementos, los ganchos, las relaciones que estos mismos elementos puedan tener entre sí y con otros que te parezca que puedan serte útiles en esta ocasión... Es aquí donde intervienen muy decisivamente tus conocimientos previos, cómo los tienes estructurados, tus experiencias anteriores con situaciones semejantes. Todo esto, por supuesto, es algo que irás adquiriendo a medida que te dedicas más y más al estudio de las matemáticas y a la experiencia de demostrar y de resolver problemas.

No te extrañe, por eso, que a quien se ha dedicado mucho tiempo a las matemáticas se le ocurran cosas que te parece que nunca se te ocurrirán a ti mismo. Posiblemente no es que sea más listo. Simplemente lleva más años en el oficio.

Lo anterior, tratar de familiarizarte con los elementos que aparecen en la situación que estudias, es algo que debes realizar siempre ante la tarea de demostrar una afirmación que te propongas o te propongan. Asegúrate que entiendes bien de qué se trata. Esto se irá convirtiendo en una rutina totalmente familiar. Una vez que te has asegurado de que entiendes bien de qué va tu tarea puedes proceder adelante de diversas maneras. He aquí algunas formas de proceder que pueden resultarte útiles.

2. Métodos de demostración

2.1. Demostración ”marcha adelante”

Recuerda que se trata de demostrar que si se verifica A, entonces se verifica B. Examina los elementos de la situación A a fondo, con un ojo puesto en la situación B, es decir, mira los elementos que aparecen en A y los hechos que sobre ellos ya conoces o puedes deducir fácilmente, que serán más y más a medida que ganes en experiencia y en conocimientos. Y al mismo tiempo trata de entender la situación expresada en B. Se trata de colocar en el foco de tu atención los hechos de la situación A que tienen que ver con los elementos que han surgido de tu exploración de B.

Este examen tal vez te lleve directamente a deducir la verdad de la situación B que es lo que estabas buscando, pero lo más probable, a menos que estés ante una tarea muy sencilla, es que de A sepas cómo deducir unas cuantas cosas, C, D, E, y que tal vez de alguna de ellas, por ejemplo D, sepas deducir V que te parece que te lleva más cerca de B. Procediendo así posiblemente llegas finalmente a B.

Este tipo de demostración ”marcha adelante” se suele llamar demostración directa y se parece a la forma de proceder cuando estás delante de uno de esos diagramas de laberintos en los que dentro de una malla enrevesada figura un tesoro. Quieres ir desde fuera hasta el tesoro. Una de las formas de actuar es ir recorriendo, empezando desde fuera y siempre poniendo los ojos en el tesoro, los pasadizos que, esperas, te conduzcan finalmente a él.

****

Ejemplos de demostración marcha adelante

****

(1) *Demuestra que el cubo de un número impar es también impar*.

Aquí lo que te aparece en el punto de partida, y en el de llegada, es un número impar.

¿Cómo son los números impares? Los que no son pares, el anterior y el posterior a un par. ¿Cómo son los pares? Los que resultan de multiplicar por 2 un número entero. Es decir los pares son de la forma $2k$ siendo k entero. Y por tanto los impares son los de la forma $2k \quad 1$, siendo k un número entero. ¿Y cómo será el cubo de tal número $2k \quad 1$? Fácil:

$$2k \quad 1^{3} \quad 8k^{3} \quad 12k^{2} \quad 6k \quad 1$$

Ahora ya aparece todo bastante claro. El número $8k^3 \quad 12k^2 \quad 6k \quad 2\ 4k^3 \quad 6k^2 \quad 3k$ es claramente par y por tanto $2k \quad 1^{3}$ es impar. Ya hemos llegado.

****

(2) *Demuestra que si ABCD es un rombo*, *las diagonales AC y BD son perpendiculares*.

Nos colocan delante un rombo (situación inicial). Nos lo dibujamos recordando que un rombo es un paralelogramo con sus cuatro lados de igual longitud. Nos piden que, razonando, lleguemos a concluir que las diagonales son perpendiculares.

Para demostrar que las diagonales son perpendiculares tratamos de hacer uso de la información que nos dan: los cuatro lados del paralelogramo son iguales. Así AB es igual en longitud que AD. Por lo tanto A se encuentra en la mediatriz de BD. También, del mismo modo, C está en la mediatriz de BD. Por lo tanto AC es la mediatriz de BD y así es perpendicular a ella.
****

(3) *Vamos a tratar de demostrar marcha adelante que las dos soluciones de la ecuación* $ax^2+bx+c=0$ *son*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Primero observamos (una astucia que se aprende mirando cómo lo han hecho antes otros en casos similares) que si b fuera 0 la cosa sería muy fácil, ya que entonces la ecuación dada sería

$$ax^2+c=0$$

y esto se resolvería muy fácilmente, obteniendo

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4ac}}{2a}$$

que es la fórmula de arriba cuando $b=0$.

Pero como b no es 0 en general, trato de ver si puedo hacer algún cambio que reduzca el problema a este caso. Pongo en la ecuación $x=y+m$ (no sé qué va a ser y ni m) y trato de ver si eligiendo bien m puedo conseguir una ecuación de la forma anterior con y como incógnita que pueda resolver como he hecho antes. Si tengo y y m entonces tengo x. Vamos adelante

$$0=ax^2+bx+c=a(y+m)^2+b(y+m)+c=ay^2+2aym+am^2+by+bm+c$$

Si escojo m tal que $2am+b=0$, es decir $m=-b/(2a)$, entonces lo que obtengo es

$$ay^2-\frac{1}{4a}b^2+c=0$$

de donde sale

$$y \quad \frac{\sqrt{b^2 \quad 4ca}}{2a}$$

y por lo tanto

$$x \quad \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

****

Ejercicios de demostración marcha adelante

Demuestra que el cuadrado de un número impar es impar.

Demuestra que si n es impar, entonces $m \quad 3n^3 \quad 5n^2 \quad 13n \quad 1$ es par.

Demuestra que las tres mediatrices de los lados de un triángulo cualquiera se cortan en un punto.

Demuestra que las tres bisectrices interiores de un triángulo cualquiera se cortan en un punto.

Demuestra que si a y b son dos números naturales, M es su mínimo común múltiplo y d su máximo común divisor, entonces $Md \quad ab$.

****

2.2 Demostración marcha atrás

Otra forma posible de demostración consiste en proceder al revés que en los casos anteriores. Ponemos nuestra atención primeramente en B, es decir en la afirmación a la que queremos llegar. Con un ojo puesto en A, vamos tratando de buscar situaciones intermedias E, F, G, de las que B se podría deducir. Es decir nos damos cuenta de que $E \quad B$, y de que también $F \quad B$, y $G \quad B$. Vamos mirando ahora si alguna de estas podría estar relacionada con la situación A, es decir se podría deducir de ella. Cuando encontramos, por ejemplo, que $A \quad F$, ya tenemos lo que queremos: $A \quad F$, $F \quad B$, y así $A \quad B$. Hemos conseguido la demostración que buscábamos. Naturalmente la cadena de implicaciones puede ser mucho más larga y difícil de encontrar. Como ves, en realidad se trata de un procedimiento para, finalmente, dar con una demostración marcha adelante.

Este tipo de demostración se puede llamar demostración marcha atrás y algunos la llaman demostración indirecta. Se parece a lo que podemos hacer en la búsqueda del tesoro en el laberinto del que antes hablamos. Podemos empezar nuestra búsqueda del camino que desde fuera conduce al tesoro partiendo del lugar donde el tesoro se encuentra, es decir, tratamos ahora de llegar al exterior desde el compartimento del tesoro. Cuando lo logramos nos viene bien convencernos de que podemos revertir el camino. El símil no es del todo exacto, pues en matemáticas sucede a menudo que hay camino de fuera adentro y no de dentro afuera o al revés.

****

Ejemplos de demostración marcha atrás.

(1) *Demuestra que*, *si* $x \quad 0$, *entonces*

$$x \quad \frac{1}{x} \quad 2$$

****

Miramos lo que nos dicen que demostremos, es decir B, que aquí es

$$x \quad \frac{1}{x} \quad 2$$

y observamos que esto es igual que F, es decir que

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

y que esto es lo mismo que G

$$\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geq 0$$

Observando el numerador de esta expresión nos damos cuenta de que es $(x - 1)^2$, es decir el cuadrado de un número, lo cual es siempre mayor o igual que 0. Es decir vemos que G es siempre cierto. Como nos dicen que $x > 0$, resulta ya claro que, G implica F y F implica B. Es decir resulta efectivamente que, si $x > 0$, entonces se tiene siempre

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

****

(2) *Demuestra que si x e y son números reales positivos, entonces*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

Como antes, ponemos los ojos en la desigualdad que queremos demostrar y nos damos cuenta de que es lo mismo que

$$\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0$$

y esto es equivalente a

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

Como nos dicen que $x > 0$ y que $y > 0$, podemos poner $\sqrt{x} = a$ y $\sqrt{y} = b$ y así lo anterior es lo mismo que

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

Pero esto es claro ya que

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

Por lo tanto, recorriendo el camino inverso, vemos que de la última desigualdad, que es clara, llegamos a lo que nos piden.

(*Por cierto, lo que hemos demostrado en este ejercicio se llama la desigualdad aritmético-geométrica, es decir que la media aritmética de dos números positivos es mayor o igual que su media geométrica*)

****

(3) *Demuestra que, para tres números no nulos cualesquiera, a, b, c, se verifica siempre*

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$$

Aquí A es que los tres números a, b, c, son distintos de 0 y B es la desigualdad de arriba. Miramos B y la escribimos de otra forma

$$3ab \quad 3bc \quad 3ca \quad a^2 \quad b^2 \quad c^2 \quad 2ab \quad 2bc \quad 2ca$$

Restando $2ab \quad 2bc \quad 2ca$ de los dos miembros de esta desigualdad (lo que nos da una desigualdad equivalente), obtenemos

$$ab \quad bc \quad ca \quad a^2 \quad b^2 \quad c^2$$

Si demostramos esta última desigualdad tendremos demostrado A, ya que todas las desigualdades que hemos escrito son equivalentes.

¿Cómo hacerlo? Mirando ahora esta desigualdad, podemos percibir que cada uno de los miembros tiene una expresión que resulta familiar en geometría. El primer miembro es el producto escalar de los vectores a,b,c y b,c,a . El segundo miembro es el producto de los módulos de estos dos vectores (aquí tienen el mismo módulo que es $\sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2}$)

¿Qué sabemos del producto escalar de dos vectores relacionado con sus módulos? Sabemos que el producto escalar de dos vectores es exactamente el producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman y también sabemos que el coseno está siempre en el intervalo $1,1$.

Por tanto es cierto que $ab \quad bc \quad ca \quad a^2 \quad b^2 \quad c^2$, y así obtenemos A.

****

Ejercicios de demostración marcha atrás.

Demuestra marcha atrás, que si a es un número fijo que verifica $0 \quad a$, entonces para cualquier número t que verifica

$0 \quad t \quad a$, resulta que $F\ t \quad sent \quad sen\ t \quad a\ /\ cost \quad cos\ t \quad a$ es un valor independiente de t.

****

Observaciones sobre la demostración "marcha adelante" y "marcha atrás".

Al hablar de métodos de demostración también se suele hablar de método analítico y método sintético. El método sintético viene a corresponder al método directo, "marcha adelante", descrito arriba (a partir de los elementos de A se sintetizan, se componen los elementos de B). En el método analítico se disgregan, se descomponen, se analizan los elementos de B tratando de ver cómo pueden surgir, ser obtenidos, a partir de los de A. Se trata de nuestra forma de demostración "marcha atrás". Tradicionalmente se ha dicho que hacemos una demostración indirecta de P cuando lo que probamos es la falsedad de no-P. La terminología no tiene mucha importancia, pero ciertamente ayuda a que nos entendamos mejor.

Lo importante, en los tipos de demostración marcha adelante y marcha atrás, como has visto, es tratar de poner en claro las conexiones del punto de partida con el punto de llegada. Para esto te debes ayudar de todos los trucos a tu mano, figuras, cálculos, casos sencillos, que te puedan proporcionar pistas sobre esas conexiones.

¿Cuándo proceder hacia adelante y cuándo proceder hacia atrás?

En ocasiones puede suceder que conozcas mejor, estés más familiarizado con los elementos que figuran en A o sepas manipularlos más eficazmente. Otras te manejarás mejor con los elementos de B. De todos modos es claro que tienes que tener siempre la mirada atenta a las dos situaciones A y B que quieres enlazar y es obvio que cuanto mejor sea tu conocimiento inicial de ambas situaciones tus posibilidades de éxito serán mayores.

****

2.3. La demostración por contraposición

La demostración por contraposición podría ser llamada demostración ”*supongamos que no*” y procede de la siguiente manera.

Queremos demostrar que $A \quad B$, es decir que si se verifica A, entonces se verifica B. Como hemos visto en el capítulo anterior, y por otra parte es bastante evidente, esto es equivalente a demostrar que $no\,B \quad no\,A$, es decir que si no se verifica B entonces no se verifica A. En ocasiones puede resultar más fácil de realizar la demostración de esta segunda proposición. Más adelante veremos cómo se pueden señalar algunas circunstancias generales en las que este procedimiento sea aconsejable.

****

(1) *Un ejemplo sencillo de demostración por contraposición*

Tratamos de demostrar que, *de acuerdo con las reglas del ajedrez*, *cada peón se mueve a lo sumo* 6 *veces*.

Consideramos un peón cualquiera. Supongamos que se mueve 7 veces o más. Tratamos de llegar a deducir que no hemos cumplido las reglas del ajedrez.

Tras el primer movimiento el peón se encuentra al menos en la fila tercera. Tras el segundo movimiento se encuentra al menos en la cuarta... Tras el séptimo movimiento se encuentra al menos en la novena,...fuera del tablero.

****

(2) *Sea n un número entero*. *Demuestra que si* n^2 *es par*, *entonces n es par*.

Aquí queremos demostrar $A \quad B$, siendo A

$$n^2 \text{ es par}$$

y B

$$n \text{ es impar}$$

Para demostrarlo por contraposición convertimos nuestra tarea en: $no\,B \quad no\,A$, es decir

Demostrar que si n es impar, *entonces* n^2 *es impar*.

Pero esto ya lo has hecho entre los ejercicios de la demostración *marcha adelante*”.

****

(3) *Demuestra que si c es un número impar la ecuación* $n^2 \quad n \quad c \quad 0$ *no tiene ninguna solución entera*.

Supongamos que n fuera solución. No puede ser par porque entonces c sería par. Si es impar es de la forma $n \quad 2k \quad 1$. Substituimos arriba para ver si es posible que se pueda tener

$$2k \quad 1^{\;2} \quad 2k \quad 1 \quad c \quad 0$$

Haciendo cuentas resulta

$$c \quad 2k \quad 1^{\;2} \quad 2k \quad 1 \quad 4k^2 \quad 6k \quad 2$$

Y c sería entonces par, lo que está excluído.

****

Ejercicios de demostración por contraposición

****

Si S es un subconjunto del conjunto T de números reales y S no está acotado, T tampoco.

(*Recuerda que un conjunto M de números reales se dice acotado con cota C cuando existe un número real y positivo C tal que para cada a* $\quad$ *M se verifica* $|a| \quad C$)

****

Si p y q son números reales positivos tales que

$$\sqrt{pq} \qquad \frac{p \quad q}{2}$$

entonces $p \quad q$.
****
Si n es un entero mayor que 2, no hay ningún entero m con $n \quad m \quad nm$.
****
Si en un cuadrilátero no hay ningún ángulo obtuso, es decir de más de 90º, entonces dicho cuadrilátero es un rectángulo.
****

Añadir ejercicios

2.4 Demostración por reducción al absurdo

El método de demostración por reducción al absurdo procede de la siguiente manera. Demostrar que A implica B, es decir que si se verifica A entonces se verifica B, es equivalente a demostrar que A y *no* B implican cualquier proposición falsa, cualquier absurdo.

Efectivamente, por una parte si demostramos que A y *no* B implican un absurdo cualquiera, P y *no* P, entonces, suponiendo A cierto, es claro que no se puede dar *no* B, ya que entonces se daría P y *no* P al tiempo, una contradicción que no puede admitirse. Es decir se verifica B.

Por otra parte, si A implica B y se da A, entonces se da B, es decir A y *no* B es falso.

En otras palabras, en la demostración por reducción al absurdo transformamos nuestra tarea de demostrar $A \quad B$ en otra consistente en demostrar que A y *no* B nos lleva a cualquier disparate, es decir que de A y *no* B deducimos una falsedad obvia, sea la que sea. Si lo logramos, es claro que A y *no* B es falso. Como A forma parte de la hipótesis y lo podemos dar como cierto, es claro que *no* B es falso, es decir que B es verdadero.
****
Ejemplos de demostración por reducción al absurdo
****
(1) *El ejemplo clásico, profundo y antiguo.*
Demuestra que $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

Parecería que aquí no se da la forma A implica B. En éste, como en muchos otros casos en que se propone demostrar algo, se da por entendido que hay que demostrar lo que se propone partiendo de las cosas que se saben, se suponen demostradas o admitidas, aquí en concreto sobre los números. Como si dijéramos: Demuestra que los hechos conocidos sobre los números racionales implican que $\sqrt{2}$ es irracional.

Para proceder por reducción al absurdo partimos de los hechos conocidos sobre los racionales y de que $\sqrt{2}$ es racional, es decir es de la forma p/q, siendo p y q dos números enteros. Podemos suponer que p/q está en forma irreducible, es decir que p y q no tienen ningún factor común.

Ahora empezamos a deducir y tratamos de llegar a un absurdo, una contradicción.

Si $\sqrt{2} \quad p/q$ entonces $p^2 \quad 2q^2$. Esta igualdad pone en claro que uno de los factores de p es 2, es decir p es par, $p \quad 2r$.

Substituyendo en la igualdad anterior, resulta $4r^2 \quad 2q^2$, es decir $2r^2 \quad q^2$. Pero esto nos dice que también 2 es un factor de q, es decir también q es par. Pero habíamos partido de que p y q no tenían ningún factor en común. Hemos llegado a un absurdo, a una contradicción que nos indica que nuestro punto de partida, es decir que $\sqrt{2}$ es racional, es

de la forma p/q , no puede ser verdadero.
****

(2) *Otro de los clásicos.*
Demuestra que los números primos nunca se acaban. Siempre hay más.

Supongamos que se acaban y que todos ellos están en esta lista:

$$2,3,5,7,11,13,\ldots,P$$

Así P es el último primo. Formamos el número

$$M = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots P + 1$$

y nos preguntamos si M es primo o no. Si lo es ya tenemos una contradicción, pues claramente M es mayor que P . Si no es primo entonces es compuesto, es decir admite como factores alguno de los primos de nuestra lista. Supongamos por ejemplo, que $M = 7H$. Entonces

$$7H = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots P + 1, \text{ y por lo tanto, } 1 = 7(H - 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdots P)$$

pero la última igualdad es claramente imposible ya que 7 no divide a 1.
****

Ejercicios de demostración por reducción al absurdo.
****

Demuestra que el conjunto de los números primos de la forma $p = 4k + 3$ *es infinito, siendo k un número natural. Es decir, la lista de primos* $7,11,19,23,31,\ldots$ *no se acaba nunca.*

(Pista: Empieza por suponer que se acaba y que la lista completa y ordenada es la siguiente

$$p_1 = 7, p_2 = 11, p_3 = 19, p_4, \ldots, p_N$$

Utilizando la idea del ejemplo que has visto antes formas el número

$$J = 4\cdot p_1\cdot p_2 \cdots p_N + 3$$

Si es primo, obtienes una contradicción. Si es compuesto piensa en su descomposición en factores primos. Observa y demuestra que un primo cualquiera ha de ser o bien de la forma $4k + 1$ o bien de la forma $4k + 3$. ¿Podrían ser todos los factores primos de J de la forma $4k + 1$? Demuestra que no. Por lo tanto J es múltiplo de alguno de los números $p_1,p_2,p_3,p_4,\ldots,p_N$, , por ejemplo de p_5, es decir

$$J = 4\cdot p_1\cdot p_2 \cdots p_N + 3 = m\cdot p_5$$

De aquí obtendrás fácilmente una contradicción).
****

Demuestra que si n , número natural, no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ *es irracional.*
****

Demuestra que una ecuación polinómica con coeficientes enteros y coeficiente principal 1 *no puede tener raíces racionales no enteras.*
****

Demuestra que es imposible escribir números utilizando cada uno de los diez dígitos *una sola vez de modo que su suma sea* 100.

****

Más ejercicios

Observaciones sobre la demostración por reducción al absurdo

El tipo de demostración razonablemente preferible en matemáticas es la demostración directa y en muchas ocasiones es aconsejable hacer un esfuerzo por obtener una versión directa a partir de cualquier demostración que uno ha obtenido de un cierto hecho.

¿Por qué es preferible la demostración directa? En la demostración por reducción al absurdo, por ejemplo, uno está trabajando gran parte del tiempo con afirmaciones que son falsas, como se va a poner en claro en el último momento de la demostración. Se podría pensar que a uno que no esté atento a la situación se le podría provocar a través de ello una especie de esquizofrenia, o al menos una gran confusión de ideas.

Pero no siempre es sencillo obtener una demostración directa de un teorema tal como está propuesto. Los otros tipos de demostración se deben apreciar en su justo valor, tanto heurístico como demostrativo. Las primeras demostraciones de un teorema complicado suelen ser complicadas, farragosas, opacas. Con el tiempo se van depurando y se obtienen otras mucho más transparentes. El matemático se privaría de poderosas herramientas si, por un purismo estéril, decidiera no utilizar más que el método de demostración directa.

Por otra parte un aspecto muy importante del oficio del matemático consiste en el trabajo de deducción correcta de conclusiones, y esto se realiza tanto en el método directo como en los otros. Más aún, cualquier demostración por contraposición se puede mirar como demostración directa de otro teorema. Si llamamos C a la proposición no-B, y D a la proposición no-A, la demostración por contraposición de que A implica B es la demostración directa de que C implica D.

A continuación se presenta un ejemplo de una demostración directa de un hecho que antes hemos visto demostrado de forma indirecta. Está basada en la misma idea que surgió allí.

****

Demuestra que, *para tres números no nulos cualesquiera*, a, b, c, *se verifica siempre*

$$3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2$$

Demostración directa.

Consideramos los dos vectores del espacio de componentes $v = (a, b, c)$ y $w = (b, c, a)$. Su producto escalar es $v.w = |v||w|cos(v, w)$, y como $|cos(v, w)| \le 1$, resulta $|v.w| \le |v||w|$ y en nuestro caso

$$ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$$

Sumando a los dos miembros $2(ab + bc + ca)$ obtenemos la desigualdad de arriba.

Como puede apreciarse esta presentación oscurece un tanto el posible origen de la idea que está en su base, lo cual la hace más sorprendente pero menos transparente.

****

¿Se puede señalar alguna situación en que parezca que la tarea de demostrar A implica B ha de resultar más fácil ensayando inicialmente con ”supongamos que no”?

Cuando B es una afirmación que se hace de todos los elementos de un conjunto es claro que no-B está diciendo que para algún elemento, p, de ese conjunto algo sucede. Empezar pensando en el elemento p y apoyarnos en lo que sabemos que sucede con él para llegar a no-A puede ser un buen punto de partida.

Cuando hemos abordado la demostración (por reducción al absurdo) de que $\sqrt{2}$ es irracional, hemos procedido así. Lo que queríamos demostrar, B, que aquí es que $\sqrt{2}$ es irracional, es lo mismo que decir que para cada p/q racional sucede que $p/q \neq \sqrt{2}$. Por lo tanto no-B dice que para algún p/q racional se tiene $p/q = \sqrt{2}$. Y así es como hemos comenzado. Aquí ha resultado más fácil demostrar algo de un racional, cuya estructura es relativamente sencilla, de lo que hubiera sido tratar de demostrar algo sobre $\sqrt{2}$ que, aunque sea un número bien concreto, tiene una estructura mucho más complicada.

****

2.5 Demostración por inducción

(a) La inducción simple.

Se puede pensar en utilizar el método de demostración por inducción para demostrar que una cierta proposición que afirma que algo es cierto para un número natural cualquiera (o para un número natural mayor que 5, por ejemplo).

Quieres demostrar que una cierta proposición $P(n)$ que se refiere a los números naturales n es cierta para cada n. Por ejemplo, quieres demostrar que para cada número natural n la suma de los n primeros números naturales vale $n(n+1)/2$. Procede así:

(A) Demuestra que $P(1)$ es cierta.

(B) Demuestra que si $P(h)$ es cierta, entonces $P(h+1)$ es cierta. Así queda claro que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Se puede entender el proceso pensando en una fila de fichas de dominó puestas de pie y de tal modo que si se cae una se cae la siguiente de la fila. Si te aseguras de este hecho y tiras la primera, es claro que se caerán todas.

En este ejemplo, la fase (B) del proceso indicado arriba corresponde a asegurarse de que si se cae una ficha se cae la siguiente, y la fase (A) corresponde a cerciorarse de que la primera ficha se cae.

El proceso descrito se llama método de inducción simple (o método de inducción, sin más) para distinguirlo del método de inducción fuerte que veremos mas abajo. Pero antes de ir adelante vamos a presentar unos cuantos ejemplos de demostración por inducción simple.

****

Ejemplos de inducción simple.

****

(1) *Demuestra por inducción que para cada número natural n la suma de los n primeros números naturales vale* $n(n+1)/2$.

Aquí la proposición $P(n)$ es la proposición siguiente:

"*para cada número natural n la suma de los n primeros números naturales vale* $n(n+1)/2$"

(A) Vemos si la proposición $P(1)$ es cierto. Ponemos en n en lugar de 1 en $P(n)$ y como resulta $1(1+1)/2 = 1$, vemos que claramente $P(1)$ es cierto.

(B) Tratamos de ver que si la proposición $P(h)$ es cierta entonces también lo es la proposición $P(h+1)$. (Atención: no estamos afirmando que $P(h)$ sea cierta, aún no lo sabemos más que para $h = 1$, sino que estamos tratando de demostrar que "*si* $P(h)$ *es cierta entonces* $P(h+1)$ *es cierta*")

Si $P(h)$ es cierto, entonces se tiene

$$1+2+3+4+\dots+h=\frac{h(h+1)}{2}$$

A partir de aquí queremos llegar a ver que $P(h+1)$ es cierta, es decir

$$1+2+3+4+\dots+h+(h+1)=\frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

¿Cómo lo hacemos? Miramos lo que queremos demostrar (**) y miramos de dónde partimos (*) y pronto se nos puede ocurrir que una parte de lo que figura en (**) está en (*) y así podemos escribir

$$1+2+3+4+\dots+h+(h+1)=(1+2+3+4+\dots+h)+(h+1)=\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)$$

Y ahora sólo tenemos que comprobar si es verdad que

$$\frac{h(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

para lo cual sólo es necesario dividir por $h+1$ los dos miembros de la igualdad.

De este modo hemos logrado efectivamente demostrar que si $P(h)$ es cierta entonces $P(h+1)$ es cierta como queríamos. Así queda terminado el proceso y podemos concluir que para cualquier número natural n se verifica que la suma de los n primeros números naturales vale $n(n+1)/2$.

****

Observación importante.

No pienses que la inducción solamente sirve para proposiciones en que se refieren directamente a números naturales. Hay muchas situaciones geométricas o de otro tipo que se prestan a una demostración por inducción, ya que en realidad dependen de alguna forma más o menos sutil de un número natural. A continuación se presenta un ejemplo de esta naturaleza.

****

(2) Primero unas definiciones sencillas. Un grafo en el plano es un conjunto finito de puntos y un número finito de arcos que conectan algún par de estos puntos. Aquí tienes unos cuantos ejemplos de grafos.

Dibujos

Para cada uno de los vértices de un grafo cuenta los arcos que van a parar a él. Ese número se llama el grado de ese vértice. En la figura siguiente están señalados los grados de los vértices de los grafos anteriores.

Dibujos

Demuestra por inducción (*sobre el número de arcos*) *que en todo grafo el número de vértices de grado impar es siempre par*.

(Ante todo es claro que si el número de arcos es cero, entonces todos los puntos del grafo tienen grado 0 y la proposición es evidentemente cierta)

Si hay solamente un arco (que une dos puntos, dos vértices) la verdad de la proposición es también clara, pues esos dos vértices tienen grado 1 y los otros vértices que posiblemente haya en el grafo son de grado 0.

Supongamos que la proposición es cierta para cualquier grafo de h arcos. Tomamos un grafo de h+1 arcos. Escogemos un arco cualquiera. Supongamos que une el vértice A con el vértice B. Los grados de A y B pueden ser, en principio, de alguna de las siguientes maneras:

$$1\ \ A\ par, B\ par$$
$$2\ \ A\ par, B\ impar$$
$$3\ \ A\ impar, B\ impar$$
$$4\ \ A\ impar, B\ par$$

De momento borramos ese arco. Obtenemos un grafo de h arcos. Es claro que ahora la distribución de los grados de sus vértices es la misma para los vértices que no son A ni B y que la de los vértices A y B es ahora, según los caso anteriores

$$1\ \ A\ impar, B\ impar$$
$$2\ \ A\ impar, B\ par$$
$$3\ \ A\ par, B\ par$$
$$4\ \ A\ par, B\ impar$$

Es decir, si antes A era par ha pasado a ser impar, y al revés, y lo mismo sucede para B. Estamos suponiendo que la proposición para el grafo de h arcos se verifica. Pero estamos viendo que, si restituímos el arco que habíamos borrado, resulta el grafo inicial de $h+1$ arcos, y en él el número de vértices impares permanece siendo el mismo que en el grafo de h vértices (si A y B son de distinta paridad en el grafo de h vértices) o disminuye o gana en 2 (según A y B en el grafo de h vértices sean los dos impares o los dos pares).

Por lo tanto la proposición es cierta para el grafo de $h+1$ vértices suponiendo que es cierta para cualquier grafo de h vértices

****

Ejercicios de inducción

****

Ejercicios bien ordenados

Demuestra por inducción las siguientes igualdades:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

(e) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(e) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(f) $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\frac{(2n)!}{n!}$

(g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}$

****

Utiliza alguna de las fórmulas del ejercicio para demostrar que el cubo de cualquier número entero es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros.

****

Calcula la solución de la ecuación

$$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\cdots+(x^2+20x+39)=4500$$

(Usa las fórmulas del ejercicio anterior).

****

Demuestra (por inducción sobre el número de segmentos) que si en una cuartilla trazas n segmentos, cada uno de los cuales empieza en un punto de un borde de la cuartilla y acaba en un punto de otro borde, entonces las regiones de la cuartilla así definidas se pueden pintar con dos colores de modo que cada dos trozos con borde común tiene distinto color.

****

Demuestra que si tenemos n puntos en el plano de modo que no hay tres en línea recta, el número de segmentos que determinan es $\frac{n(n-1)}{2}$

****

Deduce una fórmula para la derivada n-ésima de la función $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Demuéstrala por inducción.

Sea a un número real. Demostrar que todo polinomio P de grado $n\geq 1$ puede dividirse entre $(x-a)$, siendo el polinomio cociente Q de grado $n-1$ y siendo el resto el valor del polinomio en a, esto es, $P(x)=Q(x)\cdot(x-a)+P(a)$.

Sea a un número real. Demostrar que

$$x^n-a^n=(x-a)\cdot(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})\quad \forall x\in \mathbb{R}.$$

Deducir que si $f(x)=x^n$, entonces $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

****

Utilizando la identidad trigonométrica

$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$, *o su equivalente*

$\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta-\cos(n-1)\theta$, *prueba que*:

$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+c_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+\cdots+c_1(2\cos\theta)+c_0$ *con los c_i enteros.*

Una vez probado esto no debes dejar pasar la oportunidad y probar que si θ, en grados, es un número racional con $0<\theta<90$, *entonces* $\cos\theta$ *es irracional salvo si* $\theta=60$.

****

(b) La inducción fuerte

Al tratar de proceder por inducción según lo hemos hecho antes, a veces nos encontramos con el problema de que no nos basta saber que $P(h)$ es cierto para demostrar que $P(h+1)$ lo es también. Por eso se puede pensar en utilizar el método de inducción fuerte que procede mediante una ligera variante:

(A) Demuestras que $P(1)$ es cierta.

(B) Demuestras que si $P\ 1\ ,P\ 2\ ,\quad ,P\ k$ son ciertas, entonces $P\ k\quad 1$ es cierta.

Así queda demostrado que $P\ n$ es cierta para cualquier $n\quad \mathsf{N}$.

****

Ejemplos de utilización de la inducción fuerte.

****

(1) *Demuestra que para cada número natural n distinto de* 1 *se verifica que n es primo o se puede representar como producto de números primos*. (Esto se suele llamar el teorema fundamental de la aritmética)

Observa que si n es 2 la proposición se cumple.

Tomamos ahora un número $h\quad 1$.

Observa que suponer simplemente que h es primo o que h se puede representar como producto de primos no te ayuda nada para deducir que $h\quad 1$ es primo o que se puede representar como producto de primos. Pero en cambio el tipo de hipótesis que aparece en B sí que nos resuelve el problema.

Supongamos que para $2,3,4,5,...,h$ la proposición es cierta. Consideramos el número $h\quad 1$. Si $h\quad 1$ es primo, es claro que la proposición se cumple para él. Y si $h\quad 1$ no es primo, entonces será compuesto, es decir producto de dos números que están en la lista $2,3,4,5,...,h$. Pero cada uno de ellos se puede representar como producto de números primos, según nuestra hipótesis. Por tanto la proposición es cierta para $h\quad 1$.

Como la proposición es cierta para 2, de nuestra forma de razonar se deduce que es cierta para 3. Como es cierta para 2 y para 3, resulta que es cierta para 4.... Es decir resulta en definitiva que es cierta para todo n.

****

Ejercicios de demostración por inducción fuerte

****

Ejercicios

Demuestra que cualquier número natural se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.

****

Demuestra que cualquier polígono, *convexo o no*, *se puede diseccionar en triángulos mediante diagonales disjuntas*. (Pista: Todo polígono tiene al menos una diagonal totalmente contenida en su interior).

****

2.6 Demostración por distinción de casos

En muchas ocasiones la situación que propone una demostración es tal que se puede clasificar en un número finito de casos posibles, o bien en un conjunto infinito de clases de casos y cada uno de ellos se puede tratar mediante algún truco diferente para obtener la conclusión a la que queremos llegar. Se entenderá esto mejor con algunos ejemplos.

****

Ejemplos de demostración por distinción de casos

****

Demuestra que si a y b son dos números reales, *entonces* $|a\quad b|\quad |a|\quad |b|$.

Partimos de la definición de valor absoluto $|r|$ de un número r. Recuerda: $|r|$ es r si $r\quad 0$ y $\ r$ si $r\quad 0$. Entodo caso es un número positivo o nulo y siempre es cierto que $r\quad |r|$.

Esto nos invita a distinguir dos casos en la tarea propuesta.

Si $a\quad b\quad 0$ entonces $|a\quad b|\quad a\quad b$. Como $a\quad |a|$ y $b\quad |b|$, es claro que se tiene la desigualdad.

Si $a\quad b\quad 0$, entonces $|a\quad b|\quad a\quad b$. Como $\ a\quad |a|$ y $\ b\quad |b|$, también en este caso resulta cierta la desigualdad.

****

Demuestra que para dos números naturales cualesquiera x,y, es imposible que se verifique $3x^2 \quad y^2 \quad 1$.

Puesto que el primer término es múltiplo de 3 es claro que también el segundo lo es y así resulta que y no lo puede ser. Por lo tanto y es de una de las dos formas posibles: $y \quad 3h \quad 1$ o bien $y \quad 3h \quad 1$. Pero en cualquier caso $y^2 \quad 1 \quad 9h^2 \quad 1 \quad 6h \quad 1$, que claramente es de la forma $3k \quad 2$ que nunca puede ser igual a $3x^2$, ya que 2 no es múltiplo de 3.

****

Ejercicios

****

Demuestra que para cada número natural n, el número $n^2 \; n^2 \quad 1 \quad n^2 \quad 4$ es múltiplo de 360.

****

Demuestra que para cada número natural n, el número $3n^5 \quad 5n^3 \quad 7n$ es múltiplo de 15.

****

Ejercicios

2.7 Demostración por contraejemplo

Cuando se trata de demostrar que una cierta proposición que se refiere a un conjunto M de elementos, por ejemplo, ”todos los españoles son morenos”, no es cierta, es claro que lo más fácil que podemos hacer es presentar un español rubio. Ésta es la demostración por contraejemplo y el español rubio es el contraejemplo

Por ejemplo, tratamos de demostrar que es falsa la proposición siguiente:

Para tres números enteros y no nulos cualesquiera x,y,z y para cualquier número natural $n \quad 2$ se verifica

$$x^n \quad y^n \quad z^n$$

Nos basta presentar los números 3,4,5 como x,y,z y 2 como n. Es claro que

$$3^2 \quad 4^2 \quad 5^2$$

****

Ejercicios.

****

Demuestra que es falso que si n es un número natural cualquiera, entonces $3n \; ! \quad 1$ *es un número primo*.

****

Demuestra que es falso que cada número natural impar es suma de los cuadrados de dos números naturales.

****

Demuestra que es falso que $2^{2^n} \quad 1$ *es primo para cada número natural n*.

(Pista: Utiliza algún programa de cálculo simbólico que te factorice números grandes)

****

Ejercicios

2.8 El método de descenso de Fermat.

Aunque el método que aquí se presenta no es tan frecuentemente usado como los anteriores en el ejercicio de la demostración, es muy bello, por su sencillez y por el ingenio que demuestra, y vale la pena tenerlo en cuenta, especialmente en temas relacionados con la teoría de números, campo en el que Fermat lo utilizó profusamente con éxito.

Se basa en el hecho, bastante obvio, de que en todo conjunto de números naturales hay uno de ellos que es más pequeño que todos los demás. Procede combinando de un modo inteligente la reducción al absurdo con una especie de inducción en sentido opuesto de la manera que se describe en la siguiente situación.

Se quiere demostrar una afirmación relativa a números naturales. Por ejemplo, queremos demostrar el siguiente teorema que procede de Fermat mismo: *cada número primo de la forma* $4n \quad 1$ (siendo n un número natural) *se puede representar como suma de los cuadrados de dos números naturales*. Ejemplos: $5 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 2^2 \quad 1^2$, $13 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 3^2 \quad 2^2$, $29 \quad 4 \quad 7 \quad 1 \quad 5^2 \quad 2^2$.

Comenzamos por suponer que hay algún primo P de la forma $4n \quad 1$ que no se puede representar como suma de los cuadrados de dos números naturales. Tratamos de demostrar que si es así entonces existe otro número primo P de la forma $4n \quad 1$, más pequeño que P , que tampoco se puede obtener como suma de dos cuadrados. (Supongamos que lo hemos conseguido, como lo consiguieron Fermat y Euler). Procediendo así reiteradamente llegamos a la afirmación de que 5 , que es el primer primo de la forma $4n \quad 1$, no es suma de dos cuadrados. Pero esto es falso, de modo que nuestro punto de partida es falso y así resulta demostrado el teorema.

****

Ejemplos de demostración por descenso

****

Considera un cuadrado cualquiera en el plano y una unidad de longitud u en él. Demuestra que sea cual sea esa unidad de longitud, no pueden existir dos números naturales m, n *tales que la longitud d de la diagonal del cuadrado y la longitud l del lado de ese cuadrado satisfagan la relación*:

$$d \quad m \text{ veces } u, \; l \quad n \text{ veces } u$$

Supongamos que hay una tal unidad de longitud u y dos números m, n que verifican la relación. Es claro que $2n \quad m \quad n$. Procedemos como se indica en la figura a partir del cuadrado ABCD y, como es fácil deducir, llegamos a construir un cuadrado nuevo EDFG en que el lado ED mide $m \quad n$ veces u y la diagonal mide $2n \quad m$ veces u . Por lo tanto la relación *diagonal/lado* es ahora $m \;/n$ siendo $m \quad 2n \quad m \quad m$ y $n \quad m \quad n \quad n$. Repitiendo lo que hemos hecho cuantas veces haga falta, ha de llegar un momento en que lleguemos a construir un cuadrado de lado u . Su diagonal mide ku siendo k un número natural, lo que claramente es imposible, pues la diagonal es menor que $2u$.

****

Demuestra que no existen tres números naturales x,y,z tales que $x^2+y^2=3z^2$

Supongamos que existieran tales x,y,z. Consideremos los dos números x,y.

Veamos en primer lugar que no es posible que alguno de ellos, por ejemplo y, no sea múltiplo de 3. Efectivamente entonces y sería de la forma $3j\pm1$ y así y^2 sería de la forma $3k+1$. Sea x múltiplo de 3 o de la forma $3h\pm1$, es claro que x^2+y^2 no puede ser múltiplo de 3.

Por consiguiente tanto x como y han de ser múltiplos de 3, es decir $x=3x'$, $y=3y'$. Entonces, substituyendo en $x^2+y^2=3z^2$, resulta

$$3(x'^2+y'^2)=z^2$$

Por lo tanto z sería también múltiplo de 3, $z=3z'$, y así tendríamos

$$x'^2+y'^2=3z'^2$$

con x',y',z', claramente menores que sus homólogos anteriores.

Repitiendo este proceso lo que haga falta llegamos a que el menor de los números de las ternas que satisfacen $x^2+y^2=3z^2$ ha de ser 1, lo cual es imposible, pues hemos visto que los tres números han de ser múltiplos de 3.

****

Ejercicios de demostración por descenso.

****

Un rectángulo con su lado mayor a y su lado menor b se llama áureo cuando sucede que si se le quita el cuadrado contenido en él de lado menor b resulta un rectángulo semejante al inicial.

Demuestra que para cualquier unidad de longitud u que se elija no pueden existir dos números naturales m y n tales que a mida m veces u y *b mida n veces u.*

Es decir los lados de un rectángulo áureo son inconmensurables (*no se pueden medir con una misma unidad mediante números naturales*).

****

Demuestra que la diagonal y el lado de un pentágono regular son también inconmensurables.

****

Demuestra que no existen tres números naturales x,y,z tales que $x^4+y^4=z^2$.

[Un programa de acción para un ejercicio nada fácil. Se trata de un teorema importante de Fermat.

(a) Estudia primero cómo son todas las posibles ternas pitagóricas de números naturales, es decir las ternas (a,b,c) tales que $a^2+b^2=c^2$.

(b) Observa que, de existir tales x,y,z, la terna (x^2,y^2,z) sería una terna pitagórica.

(c) Apoyado en lo que has averiguado en (a) trata de demostrar que si existen esos números x,y,z del enunciado, entonces existen otros tres x',y',z' con $x'<x$ tales que también ellos satisfacen $x'^4+y'^4=z'^2$.

(d) Esto te lleva a un trío de números naturales $1,y'',z''$ tales que $1+y''^4=z''^2$, lo que se demuestra fácilmente que es imposible].

****

Ejercicios

Observación sobre el método de descenso.

A juzgar por los ejercicios anteriores, parecería que el método de descenso sirve únicamente para demostrar proposiciones negativas, la no existencia de tales o cuales objetos matemáticos. Pero dándole al proceso el astuto giro que le dió Fermat, se pueden obtener con el método teoremas muy interesantes de naturaleza positiva, como el que nos sirvió antes para introducir el método: *Todo número primo p de la forma* $4k \quad 1$ *es suma de dos cuadrados perfectos*.

****

Ejercicios variados

****

En la resolución de la ecuación $|x^2 \quad x \quad 6| \quad x \quad 2$ se encuentra la siguiente respuesta: La ecuación propuesta equivale a las dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \quad x \quad 6 \quad x \quad 2, \; x \quad 0 \\ x^2 \quad x \quad 6 \quad x \quad 2, \; x \quad 0 \end{array} \right\}$$

Para la primera se tiene, equivalentemente, $x^2 \quad 2x \quad 8 \quad 0, : x \quad 0$, que da $x \quad 1 \quad 3, : x \quad 0$, es decir, $x \quad 4$. La segunda ecuación se reduce a $x^2 \quad 4 \quad 0, : x \quad 0$, de donde $x \quad 2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación propuesta son $x \quad 4$ y $x \quad 2$. Sin embargo, por sustitución directa se ve que $x \quad 2$ también es solución. ¿Qué ha sucedido?

Demuestra que en un triángulo cualquiera:

Las tres bisectrices concurren. (La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados que forman el ángulo).

Las tres mediatrices concurren. (La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos).

Las tres alturas concurren. (Construye otro triángulo en el que sus mediatrices coincidan con las alturas dadas).

Las tres medianas concurren.

Demuestra que si m,n,p es una terna de números pitagóricos (es decir, verifican que $m^2 \quad n^2 \quad p^2$), entonces al menos uno de ellos es par.