CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON GEOGEBRA

GEOGEBRA es un programa de geometría dinámica libre.

Todos los problemas presentados se pueden trabajar con cualquiera de los programas de geometría dinámica, hemos elegido GEOGEBRA por ser un programa de uso libre muy fácil de manejar. Un manual básico para utilizarlo se puede obtener en:

http://www.geogebra.org/

Además de hacer la construcción geométrica con GEOGEBRA en todos los problemas propuestos se trata de encontrar el razonamiento matemático adecuado para su demostración.

Problema 1:

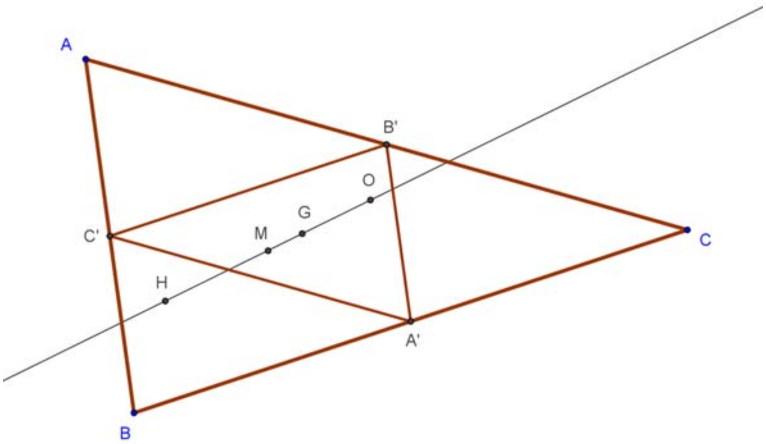
En un triángulo cualquiera **ABC**, construye el ortocentro **H**, el baricentro **G** y el circuncentro **O**. En un triángulo no equilátero mide los segmentos **HG** y **GO**. ¿Qué relación hay? Al punto medio de **HO** le llamamos **M**. Construye el triángulo de los puntos medios y su circuncentro, ¿qué pasa?

La recta que pasa por G, O y H se llama recta de Euler.

En un triángulo cualquiera **ABC** construye el incentro **I**.

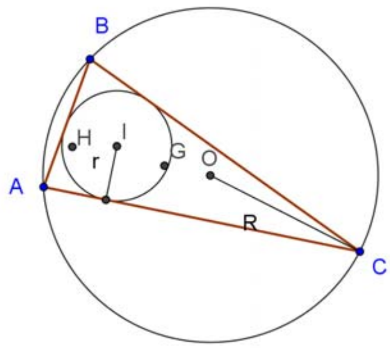
Si llamamos **R** al radio de la circunferencia circunscrita y **r** al radio de la circunferencia inscrita, comprobar que $OI^2 = R^2 - 2Rr$

Solución 1:



Para demostrar que HG=2GO, construimos el triángulo de los puntos medios A'B'C' y comprobamos que O es su ortocentro y G su baricentro. Los triángulos ABC Y A'B'C' son semejantes con razón de semejanza 2:1. En esta semejanza O es el punto correspondiente al punto H, por lo tanto

AH=2A’O. Además los triángulos AHG y A’OG son semejantes en razón 2:1. Entonces la mediana AA’ corta al segmento OH en el punto G tal que OH=3OG.
Como G está en el segmento OH, concluimos que si el triángulo no es equilátero, el circuncentroO, el baricentro G y el ortocentro H están alineados.



M es el circuncentro del triángulo A’B’C’

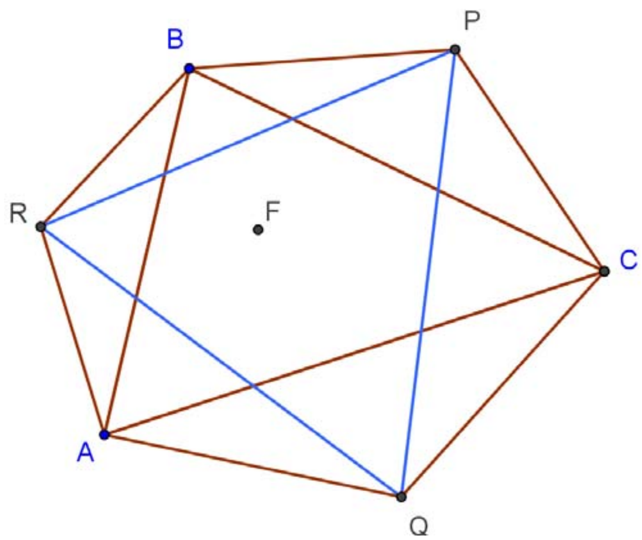
Trazamos las bisectrices del triángulo para construir el incentro I. Desde I trazamos una perpendicular a cualquier lado para dibujar la circunferencia inscrita y medimos su radio **r.** Desde O trazamos la circunferencia circunscrita y medimos su radio **R.** Finalmente comprobamos que: $OI^2=R^2-2Rr$

<u>Problema2:</u>

Dado un triángulo cualquiera ABC, sobre cada lado se construyen triángulos isósceles de modo que los ángulos iguales midan 30º. Si llamamos P, Q y R a los nuevos vértices de esos triángulos. Probar que el triángulo PQR obtenido es equilátero**.**

<u>Solución 2:</u>

Este problema es el conocido Teorema de Napoleón. Una vez construido un triángulo ABC. Para construir un ángulo de 30º trazamos un triángulo equilátero y su bisectriz. Es decir: sobre el lado AB trazamos una circunferencia con centro en A y radio AB y otra circunferencia con centro en B y radio AB para trazar el punto de intersección C’ de modo que el triángulo ABC’ sea equilátero. Trazamos la bisectriz del ángulo C’AB y la bisectriz del ángulo C’BA. A su intersección la llamamos R. De igual modo se construyen los puntos A’, P, B’ y Q. Ahora construimos el triángulo PQR y comprobamos que es equilátero sea cual sea el triángulo de partida ABC.

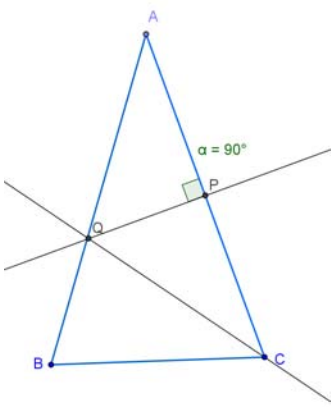


Trazamos la circunferencia de centro P y radio PB (pasa por C) y la circunferencia de centro Q y radio QC. Estas circunferencias se cortan en F y C. RQ es mediatriz de

AF, por lo tanto $\angle ARQ = \angle QRF$. RP es mediatriz de FB y $\angle PRB = \angle FRP$. Por lo tanto: $\angle ARB = 2\angle QRP \Rightarrow \angle QRP = 60^{\circ}$. Procediendo del mismo modo con los otros ángulos, demostramos que el triángulo es equilátero.

Problema 3:

Sea ABC un triángulo isósceles (AB=AC). Se traza la mediatriz m de AC y la bisectriz n del ángulo $\angle C$. Si m, n y AB se cortan en un único punto, ¿cuánto mide el ángulo $\angle A$?

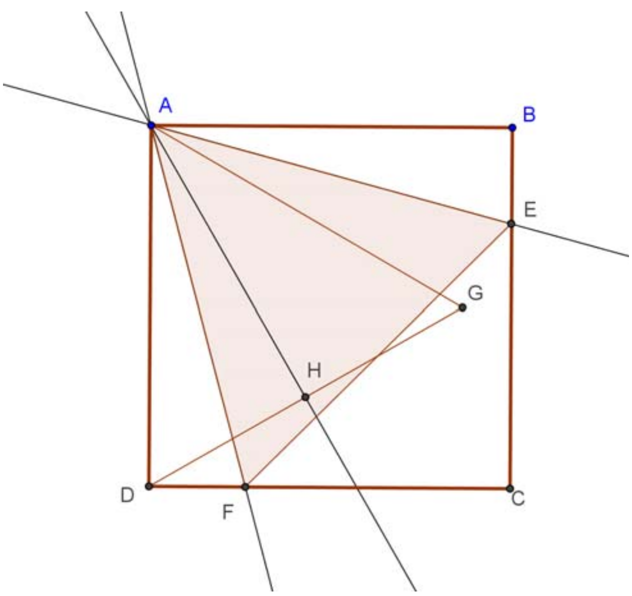


Solución 3:

Los triángulos APQ y PQC son idénticos ya que PQ es común, AP=PC (por estar P en la mediatriz de AC) y los ángulos APQ=CPQ=90º. Por lo tanto el ángulo ACB= 2CAB (por ser n bisectriz) y como los ángulos ABC y ACB son iguales entonces BAC=180º/5=36º

Problema 4:

Dado un cuadrado ABCD construir un triángulo equilátero de modo que sus vértices sean AEF, donde E es un punto sobre el lado BC y F un punto sobre el lado DC.



Solución 4:

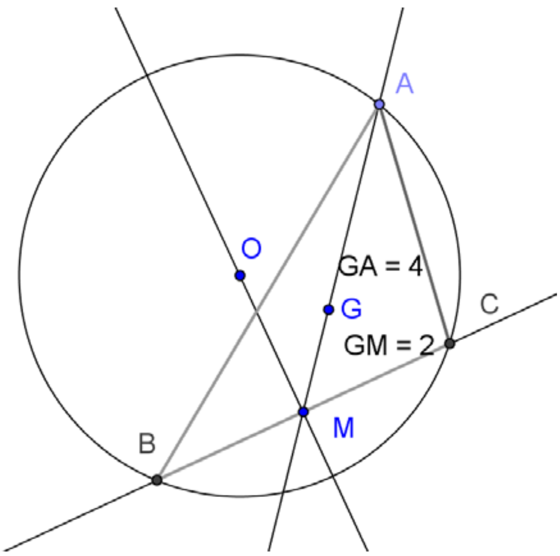
Trazamos un polígono regular de 4 lados. Luego construimos el triángulo equilátero ADG (trazando las circunferencias de de centro A, radio AD y centro D, radio DA. Estas circunferencias se cortan en el interior del cuadrado en G). Por último trazamos la bisectriz AH del ángulo GAD y nuevamente

la bisectriz AF del ángulo HAD. Así como la bisectriz AE del ángulo BAG obteniendo la figura pedida.
Por construcción los ángulos FAD y EAB miden 15º y en consecuencia el ángulo FAE mide 60º. Además los triángulos ABE y ADF son iguales pues AB=AD (por ser ABCD un cuadrado) y los ángulos BAE=DAF y ABE=ADF=90º por lo tanto AE=AF entonces AEF es un triángulo equilátero.

Problema extra1

Se tienen tres puntos O, G y M construir un triángulo de forma que O sea su circuncentro, G su baricentro y M el punto medio de un lado

Solución extra1

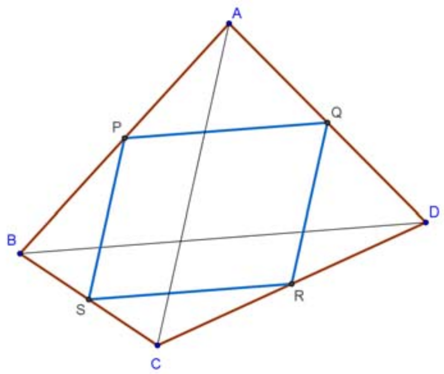


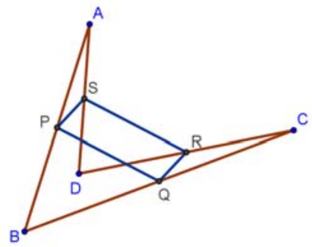
Como el baricentro del triángulo divide a las medianas en la relación 1:2, marcamos sobre la recta que pasa por G y M un punto A tal que AG=2GM. Luego como O es el circuncentro del triángulo, trazamos la circunferencia de centro O y radio OA.
Además, como M es el punto medio de BC, OM es la mediatriz de dicho lado. Entonces trazamos el segmento OM y una perpendicular a dicho segmento que pase por M. Las intersecciones entre esa recta y la circunferencia son los puntos B y C.

Problema5:

Dibuja un cuadrilátero cualquiera ABCD, llamamos a los puntos medios de los lados P, Q, R y S respectivamente y en este orden. Dibuja el cuadrilátero PQRS. ¿Qué tipo de cuadrilátero es y porqué? ¿Hay alguna relación entre el perímetro de PQRS y las diagonales de ABCD? ¿Hay alguna relación entre el área del cuadrilátero ABCD y el área del cuadrilátero PQRS? ¿Podemos conseguir que PQRS sea un rombo? ¿Y que sea un cuadrado?

Solución 5:

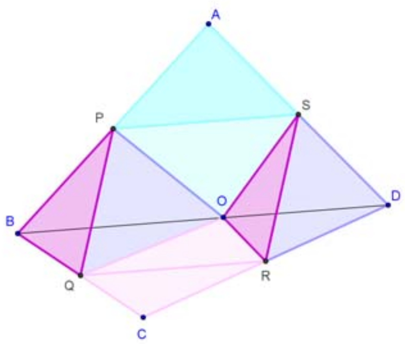




Se trata de un paralelogramo. Si trazamos la diagonal AC, PQ y RS son las paralelas medias de los respectivos triángulos.

Análogamente con la diagonal BD y las recta PS y QR.

El perímetro de PQRS es la suma de las dos diagonales, los triángulos ABC y PQB son semejantes con razón 2:1, y análogamente con los demás.



A partir de esta descomposición se pueden encontrar pares de triángulos iguales lo que justifica la afirmación anterior al menos para cuadriláteros convexos.

Si (PQRS) es el área del cuadrilátero PQRS, se tiene que:

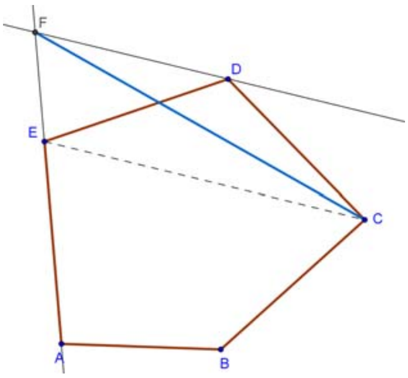
(PQRS)=(ABCD)-(PBQ)-(RDS)-(QCR)-(SAP)=(ABCD)-1/4(ABC)-1/4(CDA)-1/4(BCD)-1/4(DAB)=(ABCD)-1/4(ABCD)-1/4(ABCD)=1/2(ABCD)

Si el cuadrilátero de partida es un rectángulo obtendremos un rombo, pues en ese caso las diagonales serán perpendiculares. Y recíprocamente, si el cuadrilátero de partida es un rombo tendremos un rectángulo.

Problema 6:

ABCDE es un pentágono convexo. La paralela a EC trazada desde D corta a la prolongación de AE en F. ¿Qué relación hay entre las áreas del polígono dado y el cuadrilátero ABCF? Dibuja G de forma que el triángulo ABG tenga igual área que el pentágono inicial.

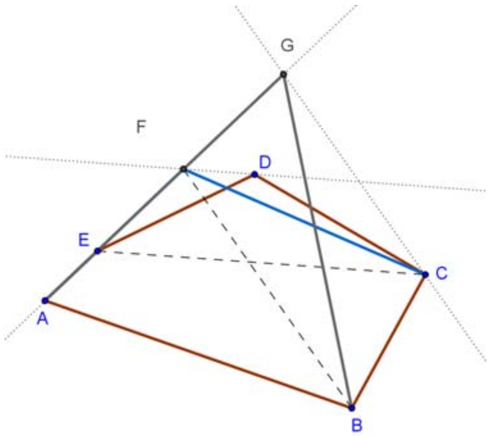
Solución 6:



En este problema se trata de transformar polígonos en otro de igual área y con menor número de lados.

Obviamente el polígono ABCF tiene la misma área pues los triángulos ECD y ECF tienen la misma área por tener la misma base y la misma altura.

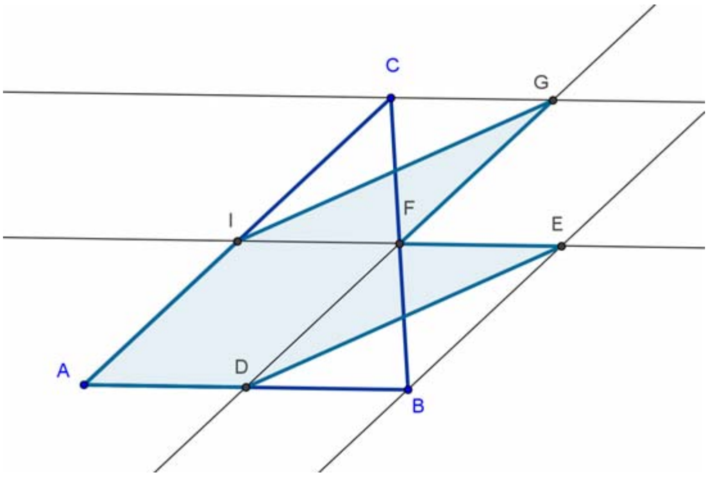
Se trata de repetir la misma construcción, trazamos la diagonal BF y una paralela a esta recta por C, esta corta a la recta prolongación de AE en G. Y los triángulos BFG y BFC tienen la misma superficie.



Problema 7:

Dado un triángulo ABC, construir un hexágono que tenga la misma superficie que ABC.

Solución 7:



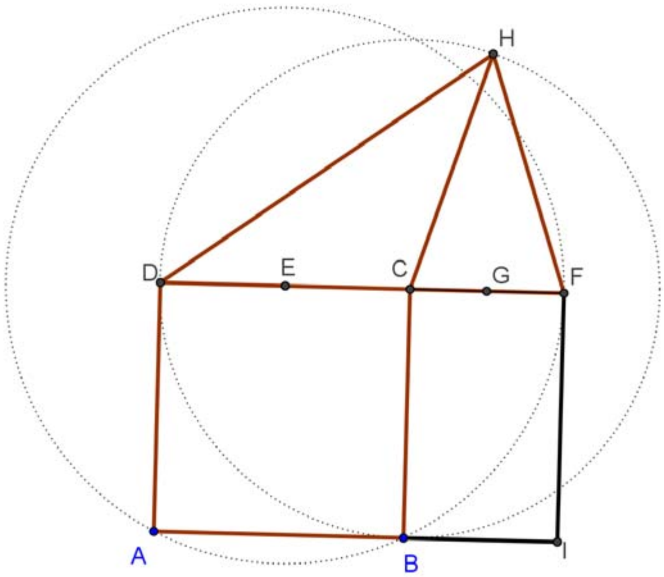
Dado el triángulo ABC, construimos los puntos medios de los lados D, F I, trazamos las paralelas por B a AC y por C a AB y las rectas que pasan por los puntos medios de los lados.

El hexágono ADEFGI tiene la misma superficie que ABC ya que IFC e IFG tienen la misma superficie por tener la misma base y la misma altura ya que C y G pertenecen a una recta paralela a IF. Análogamente DFB y DFE.

Problema 8:

Construir un rectángulo áureo y a partir de él un ángulo de 72º.

Solución 8:



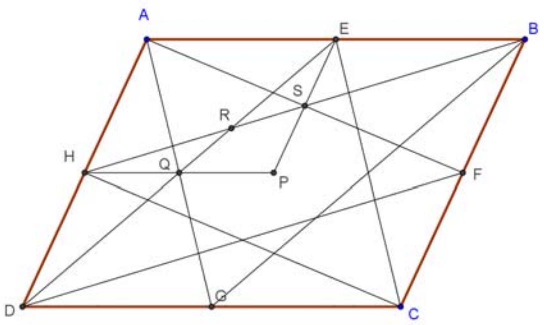
Construimos el cuadrado ABCD. Desde el punto medio E del lado DC trazamos una circunferencia de radio BE que corta a la prolongación de DC en F. Este vértice es el opuesto a A en el rectángulo áureo. Claramente la proporción de DF a DA es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Trazamos la mediatriz del segmento CF. La circunferencia de centro C y radio CD, corta a dicha mediatriz en H. Pues bien, el ángulo HCF mide 72º, ya que los triángulos HDC, CHF y FDH son isósceles.

Problema extra2

En un paralelogramo se une cada vértice con los puntos medios de los lados opuestos. Relaciona el área de este octógono con el del paralelogramo inicial.

Solución extra2:



ARP están en la misma línea y AP es 3RP ya que R es la intersección de las medianas BH y DE del triángulo ADB.

El área (APS)=3(RPS)

El área (AQP)=3(RQP)

El área (PQRS)=1/3(PQAS) = 1/6(AEPH)

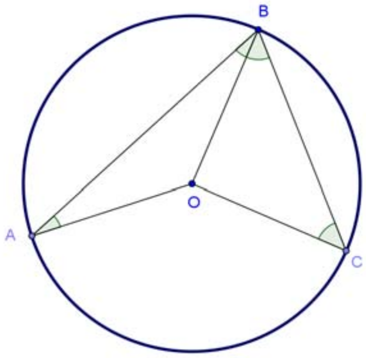
Y podemos hacer el mismo razonamiento con los paralelogramos restantes. Por lo tanto el área del paralelogramo es 6 veces el área del octógono.

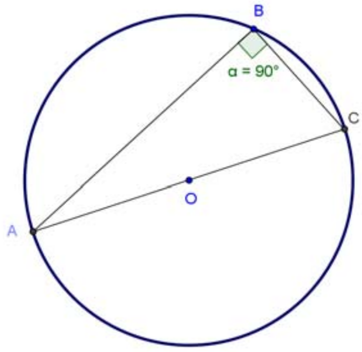
Problema9:

Sobre una circunferencia de centro O se marcan tres puntos cualesquiera ABC. Probar que el ángulo AOC es el doble del ángulo ABC. En consecuencia si AC es un diámetro de la circunferencia, el triángulo ABC es rectángulo.

Dado un segmento AB, todos los puntos P del plano que cumplen que el ángulo APB es recto forman la circunferencia de diámetro AB.

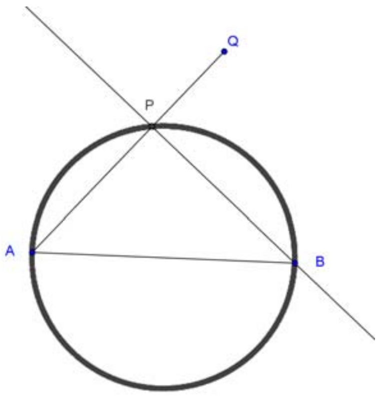
Solución 9:





Los triángulos OAB y OBC son isósceles, por lo tanto:

$$\angle AOC = 360 - (180 - 2\angle ABO) - (180 - 2\angle CBO) = 2(\angle ABO + \angle CBO)$$



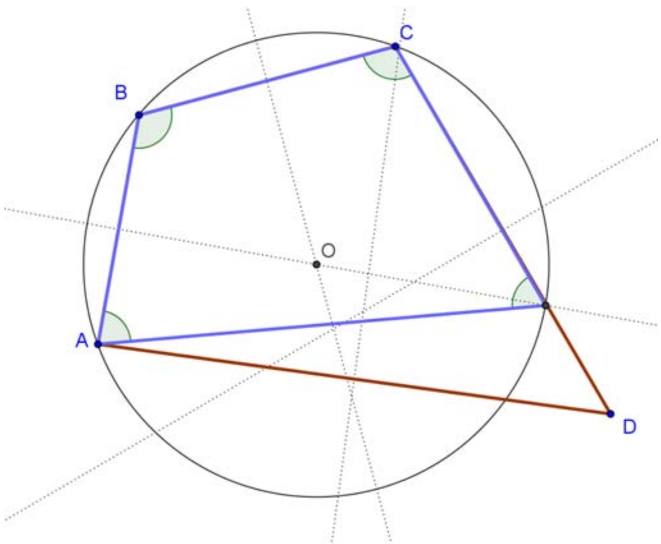
A partir de un segmento AB y un punto Q cualquiera del plano, trazamos la recta perpendicular a AQ que pasa por B. Si llamamos P a la intersección de las dos rectas. El lugar geométrico de P al mover Q por el plano es la circunferencia de diámetro AB.

<u>Problema 10:</u>

Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera, Traza las mediatrices de sus lados. Llama O a la intersección de las mediatrices de AB y BC. Traza la circunferencia con centro en O y que pase por A. Mide los ángulos del cuadrilátero. Mueve los puntos A, B, C, D hasta que las mediatrices se corten en único punto ¿Qué tiene que ocurrir para que exista una circunferencia que pase por los cuatro vértices?

Un cuadrilátero se dice que es cíclico si sus vértices están sobre una misma circunferencia. Comprueba que si el cuadrilátero es cíclico AB.CD+BC.AD=AC.BD

Recíprocamente, sobre una circunferencia elegimos cuatro puntos y formamos un cuadrilátero, comprobar las relaciones anteriores.



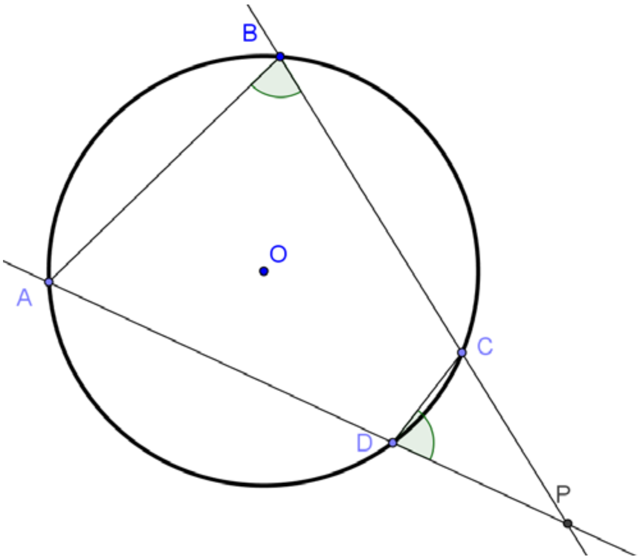
<u>Solución 10</u>

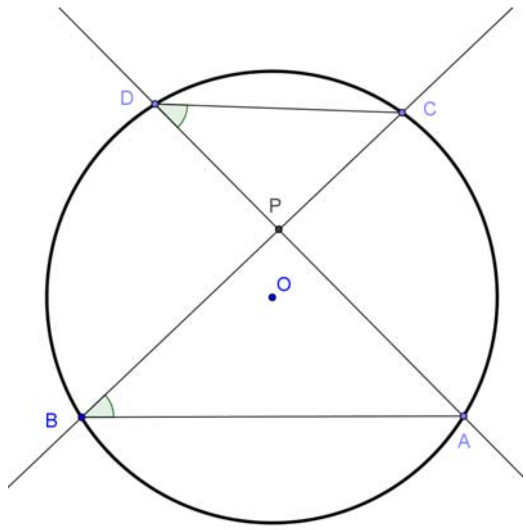
La construcción realizada nos permite comprobar que si construimos la circunferencia que pasa por tres puntos del cuadrilátero, para que el cuarto punto esté sobre la circunferencia se tiene que cumplir que la suma de los ángulos opuestos sea 180º.

Midiendo los lados y las diagonales podemos comprobar que se verifica la relación AB.CD+BC.AD=AC.BD.

Problema11:

En una circunferencia C se trazan las cuerdas AD y BC que se cortan en un punto P. Probar que CP.BP=DP.AP





<u>Solución 11:</u>

El punto P puede estar o bien en el interior de la circunferencia o bien en el exterior.

Si el punto P está en el exterior, el cuadrilátero es cíclico y los triángulos BAP y DCP son semejantes.

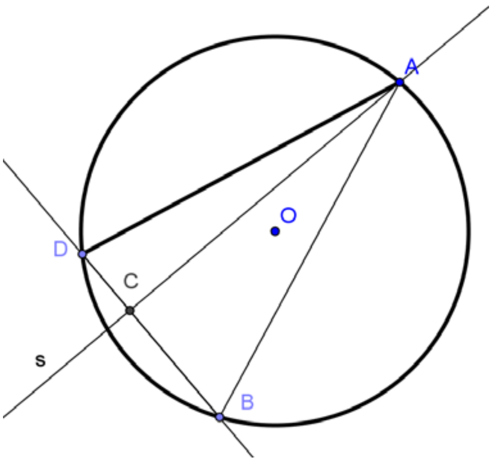
Si P está en el interior, los triángulos BAP y DCP son semejantes y por tanto sus lados proporcionales.

También se puede afirmar que si DA y BC son segmentos que se cortan en un punto interior P de modo que CP.BP=DP.AP entonces el cuadrilátero es cíclico.

Y a partir de esta construcción podemos probar que PC.PB=PD.PA, a este valor común se llama potencia del punto P respecto de la circunferencia.

Problema12:

Dada una circunferencia, elegimos una cuerda DA sobre la circunferencia y un punto B (distinto de D y de A) sobre la circunferencia, se traza la recta s perpendicular a DB desde A. La intersección entre s y la recta DB es C. hallar B para que el área del triángulo ABC sea máxima.



Solución 12:

Cuando B pertenece al mayor arco DA, la medida del ángulo ABC es constante ya que siempre abarca el arco AD. Como además el ángulo ACB es recto los triángulos ABC son siempre semejantes. Análogamente si B pertenece al otro arco. Entonces el de mayor área será el que posea los mayores lados, y este caso ocurre cuando AB es el diámetro.