Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria.

Inés Mª Gómez-Chacón y Nelo Alberto Maestre

RESUMEN

En este trabajo consideramos brevemente alguno de los aspectos del proceso de hacer Matemáticas, que conocemos como matematización. Matematizar es un ejercicio de generar nexos con la realidad y de desarrollar conceptos básicos de las matemáticas o de la lengua matemática formal. Por eso, una de las actividades didácticas fundamentales del profesor es identificar contextos, que se desvelen ante el que aprende como susceptibles de ser matematizados. Se ofrece al profesor una ejemplificación de un módulo para ser trabajado con estudiantes de Secundaria. En este módulo se considera la articulación entre tecnología y modelización, prestando atención a la génesis instrumental de los usos informáticos en matemáticas, en este caso GeoGebra e Internet.

Palabras claves: *Modelización, Materiales para Secundaria, usos del GeoGebra, Matemática realista, usos informáticos en matemática.*

ABSTRACT

In this article we address some aspects of the process of working with Mathematics; otherwise known as mathematization. To mathematize is an exercise in generating connections with reality and developing basic mathematical concepts or the formal mathematical language. This is why one of the fundamental didactic activities of the teacher is to identify the contexts to be discovered by the learner as susceptible to be mathematized. We offer here a module that can be used by a teacher with students at the level of Secondary Education. In this module we consider the articulation between technology and modeling emphasizing the instrumental genesis of the uses of computers in mathematics, in this case GeoGebra and Internet.

Key words: *Modeling, Instructional Materials for Secondary Education, uses of GeoGebra, Realistic Mathematics, uses mathematical computer.*

RESUMO

Neste trabalho consideramos brevemente alguns dos aspectos de fazer Matemáticas, que conhecemos como matematização. Matematizar é um exercício de criar conexões com a realidade e de desenvolver conceitos básicos das matemáticas ou da língua formal da matemática. Nesta perspectiva, uma das atividades fundamentais do professor é identificar contextos que se revelem para os sujeitos que aprendem como susceptíveis de serem matematixados. È oferecido ao professor um exemplo de um módulo a ser trabalhado pelos estudantes do ensino

médio. Neste módulo se considera a articulação entre tecnologia e modelização, dando-se atenção à gênese instrumental dos usos informáticos em matemática, neste caso do GeoGebra e da Internet.

Palavras-chave: Modelização, materiais para o ensino médio, usos do GeoGebra, Matemática realista, usos informáticos em matemática.

Introducción

La relación de la matemática con la realidad es una cuestión que ha interesado desde siempre a los matemáticos y a los profesores de matemáticas, unas veces se establece esta relación desde la historia, otras para motivar a los alumnos (y responder a la famosa cuestión "para qué sirven las matemáticas") o para situar la construcción de conceptos matemáticos y su significado en experiencias concretas y en conexión con otras disciplinas. Las búsquedas de estas interacciones entre matemática y lo real no son independientes. Por ejemplo, para expresar el sentido de un concepto apoyándonos en la realidad se necesita encontrar problemas concretos que lo representen suficientemente, pero no basta con esto, también es necesario acceder a los conceptos generales y descontextualizados para tratar los problemas, conocer los procesos de matematización tanto horizontales, como verticales que se producen. Preguntas que nos surgen cuando se aborda esta interacción son: ¿Cómo organizar la enseñanza para hacer operativa la conexión de la matemática con la realidad? ¿Cómo articular el conocimiento de la matemática, de su historia y de sus aplicaciones en los programas escolares? ¿Dónde poner el énfasis para medir la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades en la vida diaria (por ejemplo, tomar decisiones sobre su propia vida personal, o comprender los problemas mundiales)?

A nivel internacional estas cuestiones han sido abordadas explícitamente en muchos trabajos, entre ellos podemos destacar el grupo holandés del Instituto Freudenthal (De Lange, 1996; Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994); los estudios realizados en Dinamarca y Alemania (Blum, Niss, Huntley, 1989; Niss, Blum, Huntley, 1991, Niss, 2002) y los trabajos del grupo de estudio internacional Teaching of Mathematical Modelling and Applications; por ejemplo uno de los cuales se presentó en el congreso internacional *Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA-12) celebrado en Londres (Haines, Galbraith, Blue, Khan, 2007).

La contribución que deseamos realizar con este artículo es el desarrollo de una ejemplificación que privilegia una enseñanza de las matemáticas que favorece la relación con el mundo real; para ello se explicitarán los procesos de matematización horizontales y verticales que se deben dar para una enseñanza adecuada.

Principios del Enfoque Realista de la Educación Matemática

Los promotores más conocidos de la Matemática Realista (Realistic Mathematics Education (RME)) son Freudenthal y un grupo de profesores e investigadores holandeses del Freudenthal Institut de la Universidad de Utrecht[1].

Este enfoque trata de conectar la realidad y la actividad humana. En él se acentúa la idea de la matemática como una actividad humana. La educación matemática organizada como proceso de reinvención dirigido (guided reinvention), mediante el cual los estudiantes pueden experimentar un proceso similar al proceso por el cual las Matemáticas se inventaron y crearon. El significado que se adscribe a la invención es el de pasos en los procesos de aprendizaje mientras que el significado de dirigido (guiado) se refiere al ámbito instruccional en el proceso de aprendizaje. Se considera que la actividad matemática se inicia en procesos de *matematización* de lo real y encuentra expresiones en reglas, en *estructuras*, que se convierten a su vez en materia base para momentos de abstracción superiores generando esa jerarquía que se distancia de ese sentido común originario hasta llegar a convertirse en la realidad más alejada de él. Por ejemplo, por una parte se puede utilizar la historia de las Matemáticas como fuente de inspiración para el diseño del curso, con el objeto de diferenciar los momentos en que los *modelos matemáticos* aplicados al conocimiento y transformación de la naturaleza, han respondido al sentido común primero y a teorías complejas posteriormente. Y de otra parte, el principio del reinvención se puede inspirar en los procedimientos informales de resolución. A menudo las estrategias informales de estudiantes se pueden interpretar como anticipación de procedimientos más formales. En este caso, el proceso de reinvención utiliza conceptos de matemátización como guía.

La *reinvención guiada* posibilita a quien aprende encontrar su propio nivel explorando los caminos y recibiendo un soporte por parte del profesor según cada caso requiera. Se trata de reinventar, es decir, importa el matematizar más que la matemática; el abstraer más que la abstracción, etc. Además, esta perspectiva considera que el descubrimiento personal refuerza la motivación.

Otro aspecto importante en esta aproximación es el *lenguaje*. Éste es considerado como un elemento de importancia capital en los procesos propios de la actividad matemática. Los símbolos para los números están integrados en el lenguaje escrito y es en este ámbito donde el símbolo adquiere realidad por sí mismo, una realidad aparentemente independiente de su creador, quien a su vez trata de reorganizar su creación generando una jerarquía fenomenológica, y por medio de ella, organizar también su entorno, empleando el instrumento matemático para el conocimiento del mismo.

En resumen, los principios del *Enfoque Realista de la Educación Matemática* son los siguientes: prestar mucha atención, por parte del alumnado, a la re-invención; progresar gradualmente entre diferentes niveles de abstracción; guiarse por el

[1] Puede verse el report vistando el sitio web de Freudenthal Institute, realizado por Bastiaan J. Braams en 2001: http://www.math.nyu.edu/mfdd/braams/links/fi-visit.html.

desarrollo histórico-genético y partir de situaciones reales para desarrollar el aprendizaje matemático.

Las actividades que se presentarán en el modulo que describimos se han diseñado partiendo de cuestiones del entorno, de forma que el proceso de resolución de problema por parte del alumno pase a ser posible, gracias a la modelización y la re-invención guiada.

Modelización, un desafío básico para la enseñanza obligatoria

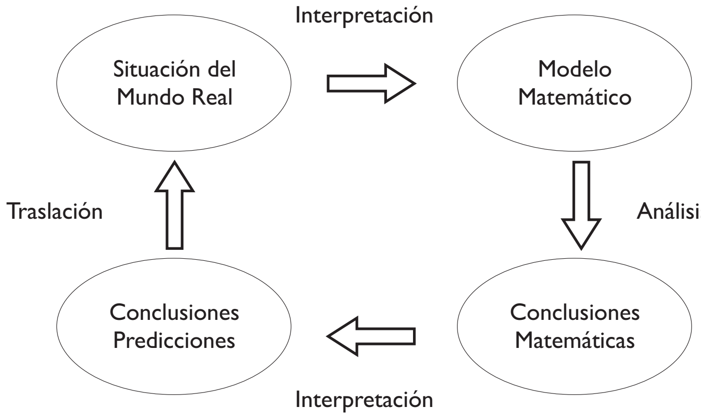
La modelización matemática es el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemáticas de una situación real. La Figura 1 puede expresar este proceso.

El proceso de modelización matemática se puede describir en varios pasos. Para alumnos como los de Secundaria, el número de pasos puede ser mínimo:

1. Identificar un problema real.
2. Identificar factores importantes y representar estos factores en términos matemáticos.
3. Usar análisis matemáticos para obtener resultados matemáticos.
4. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos y ver cómo afectan al mundo real.

A los estudiantes de Secundaria, una vez que han hecho la experiencia, se les puede explicar el cuadro de la Figura 1 y desarrollar un debate con ellos sobre qué implican los procesos de modelización para que se apropien del proceso. En algunos casos, la dificultad que se detecta con estos alumnos es que tienden a resistirse a la simplificación; exclamaciones como: “pero qué hay que hacer ahora...” son muy comunes. Es importante mantener la discusión, es decir ayudar a la reinvención guiada. Normalmente, los procesos de modelización son una sombra de la realidad. No obstante, para alentar el trabajo de los estudiantes conviene hacer alguna introducción histórica de modelos que han ayudado al avance de la historia y de los fenómenos científicos: predicciones de desastres, viajes espaciales, etc.

Figura 1.- Proceso de Modelización Matemática



Hoy trabajar la modelización es un desafío para la educación Secundaria y el Bachillerato. La modelización implica una mejor formación matemática y una mejor formación profesional. En efecto, el trabajo con la modelización lleva implícitos:

- La capacidad para resolver problemas reales con una actitud crítica.
- Una comprensión más amplia de la aplicabilidad de los conceptos.
- El desarrollo de la creatividad y el descubrimiento.
- La capacidad para integrar los conceptos.
- La capacidad para apreciar el poder de la matemática.

Concepto y aplicación de la Matematización

El proceso de hacer Matemáticas, que conocemos como matematización, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Matematizar es un ejercicio de *generar nexos con la realidad*, y es a través de esos procesos como el enfoque realista considera que ha emergido la matemática. Por eso, una de las actividades didácticas fundamentales del profesor es identificar contextos, que se desvelen ante el que aprende como susceptibles de ser matematizados. Dos tipos de matematización se pueden considerar: horizontal y vertical. Freudenthal (1991) indicó que la "matematización horizontal implica ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa el movimiento dentro del mundo de los símbolos." Pero señala que la diferencia entre estos dos tipos no es siempre de corte claro.

La matematización horizontal se sustenta sobre actividades como las siguientes:

- Identificar las Matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.

- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

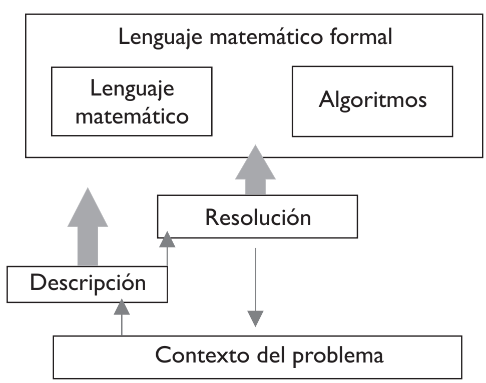
Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar.

El estudiante puede plantearse a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta parte del proceso se denomina matematización vertical. La matematización vertical incluye:

- Utilizar diferentes representaciones y modelos.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar.
- Generalizar.

El proceso de reinvención que este enfoque propone para los alumnos muestra que la matematización horizontal y vertical ocurre para desarrollar conceptos básicos de las matemáticas o de la lengua matemática formal (Figura 2).

Figura 2: Proceso de reinvención y lenguaje matemático formal



Pasamos a presentar un ejemplo de un módulo de aprendizaje.

Vol.17 Nº 1 Marzo 2008 // EXPERIENCIAS DE AULA Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Matemáticas e investigación policial

Presentación

Este modulo pretende ser una ejemplificación de modelización desde el enfoque de matemática realista[2]. Buscamos un ejemplo de aplicación de las Matemáticas en un contexto que aparentemente parezca alejado de éstas, como es en este caso la investigación policial. Vamos a hablar de la aplicación de algunos conceptos matemáticos muy concretos en la investigación de la policía científica, un campo profesional que últimamente parece resultar muy atractivo para nuestros jóvenes, debido en gran parte a su constante utilización como temática en series televisivas. Creemos que esta aplicación puede transmitir muy bien el poder las Matemáticas, uno de los fines importantes del enfoque realista de la enseñanza de las Matemáticas.

Dentro de las innumerables utilizaciones de las Matemáticas en las investigaciones de la policía científica vamos a seleccionar ejemplos que sean asequibles en cuanto a contenidos matemáticos para alumnos de secundaria pero que a la vez sean amplios, intentando explicar o aplicar mediante estos ejemplos conceptos matemáticos provenientes de distintas especialidades de esta disciplina.

[2] Este módulo pertenece a un conjunto de materiales desarrollados en el Proyecto ESCEMMat (Escenarios Multimedia en formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria). Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, subvencionado por el Vicerrectorado de Innovación y Espacio Europeo de Educación Superior, Universidad Complutense de Madrid, 2007. El módulo está desarrollado en formato web y contiene distintos applets. La dirección es http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/Geogebra_inv_policial/principal.html Para los lectores interesados pueden encontrar más módulos de este tipo en Gómez-Chacón (2006).

En este caso, en este proceso de matematización horizontal, en el que seleccionamos casos reales y los llevamos al plano matemático, hemos elegido tres campos bien diferenciados:

1. Estudio de restos óseos: Nos permitirá introducir una aplicación a la vida real de las funciones, en particular de las funciones lineales. Usaremos ecuaciones para descubrir en restos óseos características muy diferentes, ilustrando así el amplio campo de aplicación de las Matemáticas en el estudio de restos. Además dentro de la elección de las aplicaciones vamos a seleccionar ejemplos que nos permitan diferenciar elementos matemáticos propios de las funciones lineales, como es por ejemplo la pendiente, y cómo el significado de ésta varía en función de donde se aplique. Dentro de este contexto, aunque en este ejemplo no se ha explotado, se podría hablar mucho de cómo los antropólogos y biólogos utilizan la estadística, otra rama de las Matemáticas, para deducir ecuaciones como las usadas en los ejemplos.
2. Aplicaciones de la ley de Benford: Intentaremos transmitir la fuerza de esta extraña propiedad matemática, ilustrando cómo se puede hacer un estudio estadístico usando herramientas informáticas e introduciendo el tema de la probabilidad y las sorpresas que en el estudio de fenómenos aleatorios nos suelen aparecer.
3. Atrapando al sospechoso matemáticamente: Vamos ver una aplicación práctica del uso de las inecuaciones para limitar un área muy concreta. En este caso vamos a usar la forma implícita de las ecuaciones, pudiendo combinarse con el primer apartado para ilustrar las diferencias entre estas dos posibles formas de describir una recta. También veremos el significado de un sistema de inecuaciones. Este apartado es un ejemplo claro de cómo se puede contextualizar un problema en un entorno de la vida real, argumentando con situaciones comunes uno de los muchos significados que pueden tener fórmulas matemáticas. En este apartado introduciremos también el uso del programa GeoGebra (Geometry Dynamic Systems and Interactive Geometry System) como herramienta matemática.

Una vez estudiado cada apartado ilustraremos cómo se puede discutir con los alumnos la validez de los modelos propuestos, sus ventajas y sus limitaciones.

Actividades y modelización

Describimos a continuación las actividades que se desarrollan en el módulo, explicitando la modelización matemática y la instrumentalización realizada con el programa GeoGebra (como sistema de geometría dinámica (DGS)).

Estudio de restos óseos

ESTUDIO DE RESTOS ÓSEOS

La policía y los médicos forenses tienen que intentar reconstruir a partir de huesos encontrados en las escenas de delitos las características de las víctimas, para ello las matemáticas son una herramienta indispensable.

A través de estudios estadísticos se generán funciones que son capaces de estimar la altura, edad y sexo de una víctima partiendo únicamente de algunas medidas tomadas en huesos o piezas dentales.

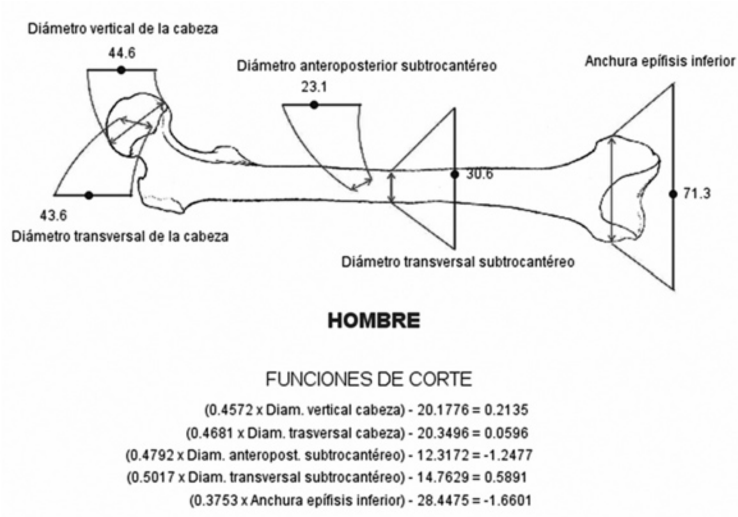
Estimación de la edad por las piezas dentales

Deducción del sexo mediante la observación de un fémur adulto

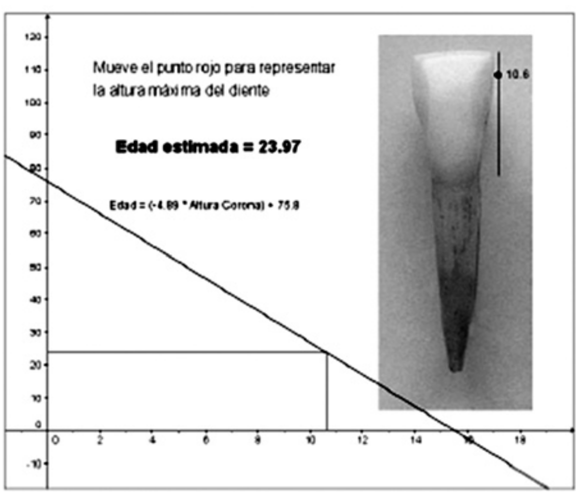
Estimación de la estatura por la observación de huesos largos

En este apartado vamos a ver una aplicación clara de las funciones lineales y del concepto de proporcionalidad directa. Al estudiar la altura de un individuo mediante las medidas de su tibia o su fémur vemos cómo la altura es proporcional a la longitud de estos huesos largos, vemos también que éste es un ejemplo de proporcionalidad directa mientras que en el ejemplo de la estimación de la edad podemos observar como es una proporcionalidad inversa. Esta diferencia entre proporcionalidad directa e inversa se aprecia visualmente al contemplar cómo las rectas en un caso tienen pendiente positiva mientras que en el otro tienen pendiente negativa.

En ambos casos se construyen applets con GeoGebra que permiten al alumno explorar el significado del concepto FUNCION: para cada valor que yo dé a la variable "longitud del fémur" obtengo un punto del eje x, que al llevarlo a la recta me corresponde a un único punto del eje y, que me representa la altura del individuo, es decir, el valor que me devuelve esa función.



El tercer ejemplo nos presenta cómo las matemáticas van más allá de las variables cuantitativas, y pueden usarse también para reflejar datos cualitativos. El aplicar una función a las diferentes medidas de un fémur me devuelve un resultado de tipo booleano, si es cierto o falso que ese fémur pertenece a un varón. En este caso no se muestran las rectas, sin embargo se demuestra cómo se han usado para convertir unos datos ambiguos en una característica más fácil de observar, si la función de un dato es mayor o menor que cero. Esta actividad se podría completar calculando para qué valores de las medidas tomadas la función nos va a dar el cero, y cómo ese valor nos representará el corte en el cual se pasa de suponer que es un fémur masculino a suponer que es uno femenino.



Como se puede observar a través de los tres ejemplos de aplicación de funciones al estudio de huesos se hace una matematización vertical muy completa, generalizando mucho sobre las ecuaciones de rectas a pesar de partir de unos pocos ejemplos muy concretos.

Pero estos modelos reales tienen limitaciones: ¿qué ocurre si una persona tiene 90 años? ¿Acaso la altura de su corona dental es negativa? Obviamente por aquí se puede llegar a cómo las Matemáticas hacen abstracciones de problemas concretos, y lógicamente las Matemáticas como abstracción abarcan un campo mucho mayor que el de los casos reales, en los que las variables tienen unas acotaciones naturales y lógicas.

La Ley de Benford

Este ejemplo está buscado para ilustrar la capacidad que tienen algunas propiedades matemáticas de colarse en ejemplos muy dispares dentro de la realidad, y lo inesperado de algunas de estas propiedades.

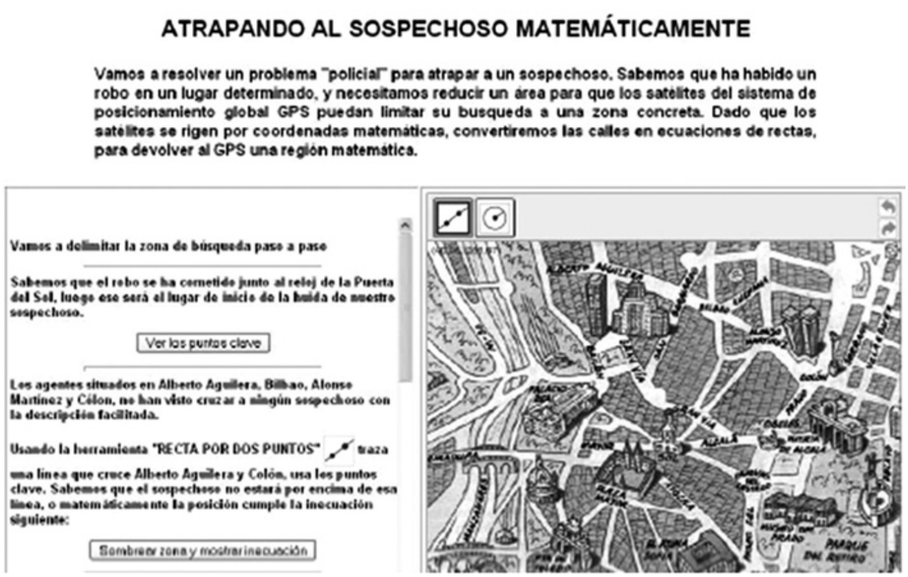
Además la ley de Benford es un ejemplo más de unas matemáticas que se están aplicando a pesar de ser meras conjeturas, y puede servir perfectamente para explicar el proceso por el cual los matemáticos deciden que todo lo que se aplica debe ser demostrado previamente para poder tener plena confianza en los resultados.

Además es una excusa perfecta para enseñar a utilizar herramientas básicas estadísticas que nos proporciona el software más común.

Pero como en el caso anterior se pueden encontrar limitaciones al modelo: ¿Se puede aplicar la ley de Benford a los números de las matriculas de los coches? ¿Y a los de las guías de teléfonos? ¿Quizá a los datos sobre las alturas de un grupo de personas? Obviamente no, pero esto es una excusa perfecta para definir funciones estadísticas conocidas como puede ser la normal o la uniforme.

Atrapando al sospechoso matemáticamente

Este ejemplo es un caso muy ilustrativo de cómo podemos pasar del lenguaje verbal al lenguaje simbólico. Un punto cualquiera de una ciudad, al que nos pode-



Vol.17 Nº 1 Marzo 2008 // EXPERIENCIAS DE AULA Y PROPUESTAS DIDÁCTICAS

mos referir por un nombre, como Cibeles o Puerta del Sol, también se puede definir matemáticamente con un par de números, por ejemplo, que llamamos coordenadas. Estas coordenadas pueden no ser útiles para el uso cotidiano en una conversación con otras personas, sin embargo son imprescindibles si queremos que un ordenador procese datos sobre un lugar o en este caso un sistema de GPS.

Dado que una calle sería el conjunto de muchos puntos, existirá una ecuación que refleje el lugar geométrico de todos esos puntos, y aquí puede sernos de gran ayuda un software matemático como GeoGebra, que nos devuelve, para la construcción puramente geométrica de una recta que pasa por un par de puntos, la ecuación de esa recta, o lo que es lo mismo, la condición matemática que cumplen todos esos puntos.

Además, esos puntos nos cumplen una igualdad, que en este caso concreto se convierte en desigualdad, para eliminar de una tacada un gran conjunto de puntos en los que no tendremos que buscar al sospechoso.

Al introducir la segunda ecuación estamos introduciendo el concepto de sistema de ecuaciones, "sólo me importan los puntos que cumplen las dos ecuaciones".

Ahora vamos a ver cómo una circunferencia se puede expresar con el lenguaje verbal "dado que no puede andar a más de una cierta velocidad, sabemos que el sospechoso se tiene que encontrar dentro de este círculo", y una vez más el GeoGebra, como herramienta matemática, es capaz de convertirme un círculo que construyo de forma puramente geométrica, pinchando un compás imaginario en un punto de la pantalla, y trazando un circulo de radio conocido, en una ecuación que cumplen unos ciertos puntos de mi mapa.

En la matematización vertical de este problema se pueden observar cómo las ecuaciones de diferentes rectas tienen sin embargo apariencias comunes, y lo mismo ocurrirá con las circunferencias, y además se pueden observar las diferencias entre las ecuaciones de una circunferencia y una recta, y también se puede ver muy gráficamente el significado de que en una ecuación la desigualdad se coloque de una forma o de otra. Además también se puede observar, como ya referimos anteriormente, cómo hay diferentes maneras de expresar la ecuación de una recta, cómo todas ellas sirven para referirse a la misma línea, igual que las distintas formas verbales o simbólicas se pueden referir al mismo objeto, y cómo las diferentes "semánticas" que utilicemos pueden ayudarnos a observar mejor estos objetos.

Este modelo, como todos los anteriores, tiene sus limitaciones, bastante obvias por otra parte, dado que todas las calles no son rectas, y que un hombre no puede andar en línea recta desde un punto en cualquier dirección, pues las calles tienen trazados a veces sinuosos que se tendrían que tener en cuenta, sin embargo estas reducciones sirven también para introducir conceptos importantes como el de la acotación.

Guía para la implementación en el aula

El profesor que desee aplicar este módulo en aula comenzará por definir la palabra modelización y ofrecerá algunos ejemplos de utilización: el movimiento de los planetas, meteorología, control del tráfico.

Indica que se trabajará las matemáticas aplicadas a la investigación policial. Se comunica que en el módulo se van a descubrir cómo se usan matemáticas para estudiar restos óseos, cómo se aplica el concepto de la "Ley de Benford" para descubrir fraudes fiscales y también resolveremos una búsqueda de un sospechoso huido convirtiéndolo en un problema matemático.

La modalidad de trabajo en el aula será de actividades de 2 horas, repartidas a lo largo del trimestre y se pueden trabajar en colaboración con disciplinas relativas a Ciencias Naturales o Conocimiento del Medio e Informática. Se podría plantear el siguiente itinerario:

1. Observación de actividades que se desarrollan en investigación policial.
2. Bosquejos por escrito de los alumnos sobre problemas policiales en los que se trabaja matemáticas.
3. Contraste de las propuestas con los problemas que se plantean en el módulo.
4. Trabajo sobre las actividades.
   - Modelizaciones de los alumnos
   - Aportaciones del profesor sobre las modelizaciones
   - Aportaciones del profesor sobre instrumentación con GeoGebra
5. Análisis crítico, predicción de situaciones y contraste con la vida real.
6. Conclusiones para el aprendizaje matemático.

Consideraciones finales

Desde nuestro punto de vista una propuesta que integre la matemática con lo real lleva inherente no sólo una posición respecto a la matemática sino una posición antropológica y ética. Se anhela no sólo introducir a los estudiantes en el conocimiento matemático, sino a contribuir a su formación como personas y como ciudadanos.

Además, un aprendizaje efectivo y una enseñanza efectiva hacen un completo uso de las capacidades naturales e investigadoras que poseen todos los alumnos. Como profesores una pregunta que nos podemos hacer es si estoy haciendo un uso completo de las capacidades de los estudiantes, o si estoy intentando hacer todo el trabajo por ellos. Si me encuentro en lo último se puede esperar un bajo interés, compromiso y gusto con y para las matemáticas. Si hacemos lo primero podremos conseguir incrementar el interés, el compromiso y el placer con y para las matemáticas.

La ejemplificación de proyecto presentada estaría integrada en un alto nivel de competencia: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales, trabajando aspectos de modelización horizontal y vertical. Hacer esta integración como profesores (en nuestras clases diarias, en los materiales que diseñamos...) exige buscar primero los fenómenos que llevan casi forzosamente al aprendiz, a constituir los objetos mentales. Sólo posteriormente se podrá introducir en el concepto a que da lugar. Esto conlleva focalizar en la enseñanza en los procesos de aprendizaje, no sólo a corto y medio, sino a largo plazo. Estos últimos son clave para el aprendizaje pues permiten guiar la reinvención con acciones como: aprender a recordar, a reconocer intuiciones, a entrenarse en desarrollar representaciones mentales y estrategias de resolución, a reflexionar sobre el propio proceso de pensamiento.

Por último, reseñar algunas observaciones a tener en cuenta en una propuesta metodológica respecto a la transformación del conocimiento científico a conocimiento para ser enseñado con Tecnologías de la Comunicación y de la Información (TIC's). Un profesor que desee implementar con sus estudiantes un módulo con estas características y en el formato web, deberá tener en cuenta las formas alternativas de representación del contenido matemático y las diferencias entre lápiz-papel y uso del software (diferentes modos de representación y cómo se justifica su uso). La instrumentalización requerida por el uso de TIC's requiere de una mayor comprensión por parte del profesor acerca de pre-condiciones matemáticas de las nuevas tecnologías para poder aplicarlas de una forma más adecuada y establecerlas como contenido curricular. También, deberá considerar la articulación entre tecnología y modelización. Se necesita prestar atención a la génesis instrumental de los usos informáticos en matemáticas, en este caso GeoGebra e Internet. Destacamos la manipulación del saber matemático en el contexto matemático con el ordenador. Estas situaciones nos plantean el desafío de explicitar nuevas competencias en el profesor para la reorganización de una parte de esquemas de utilización y para el paso a instrumento matemático.

Referencias

Blum, W.; Niss, M.; Huntley, I. (1989). Modelling, applications and applied problem solving. Teaching mathematics in a real context. Chichester, UK: Ellis Horwood.

De Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. En A.J. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 49-98). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Kluwer AcademicPublishers.

Freudenthal, H. (1991) Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gómez-Chacón, I. Mª (Ed.) (2006). Aprendiendo a Enseñar. WebQuest Matemáticas, CD-ROM. Acciones formativas de la Universidad Complutense para la Construcción del Espacio Europeo de Educación Superior. Madrid: Departamento de Álgebra, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense.

Gravemeijer, K. (1994): Developing Realistic Mathematics Education. Utrecht: CD-b Press.

Haines, C.; Galbraith, P., Blum, W.; Khan, S. (2007). Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics. Chichester, UK: Horwood Publishing.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

Niss, M.; Blum, W.; Huntley, I. (1991). Teaching of mathematical modelling and applications. Chichester, UK: Ellis Horwood.

Inés Mª Gómez-Chacón
Nelo Alberto Maestre

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
de Madrid.
España.

igomezchacon@mat.ucm.es
www.mat.ucm.es/~imgomezc