SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 109-117

# Escher II: Las matemáticas para pensar

Los pintores, como los matemáticos, trabajan con figuras. Clásicamente las figuras se caracterizan por su forma y su tamaño. Pero a partir del siglo XVIII empezó a surgir dentro de las matemáticas una forma nueva de pensar las figuras geométricas, en la que forma y tamaño resultan propiedades irrelevantes y son otros los aspectos que se estudian. A esta manera de mirar las figuras se la conoce por el nombre de topología. La topología nació en el siglo XVIII, concretamente de la mano de Leonard Euler, creció, muy despacio, a lo largo del siglo XIX y se hizo mayor de edad con Henri Poincaré  a principios del siglo XX. De hecho Poincaré, que dedicó muchos años de su vida a desarrollar la topología marcando, de alguna manera, las líneas generales que durante casi cincuenta años siguió esta disciplina,  fue capaz de darle una fuerza tal como herramienta, que en poco tiempo se convirtió en una de las piedras angulares de la matemática y física del siglo XX, afectando con ello también profundamente la manera en la que nuestra cultura mira a su alrededor. Por eso no es sorprendente encontrar también rastros de esta nueva manera en la obra de muchos pintores y artistas gráficos de la primera mitad del siglo XX. Curiosamente, muchos de estos artistas han conseguido que mucha gente, sin saberlo, se ponga a hacer topología en mitad de una galería de arte. Probablemente el caso más notorio sea el de Escher con sus reflexiones sobre las propiedades, posibles o imposibles, de las formas. Pero  empecemos por el principio. No podemos hablar de cómo ilustra la obra de Escher tal o cual aspecto del hacer de la topología, si antes no definimos lo que es la topología.  Así pues, ¿qué es la topología?

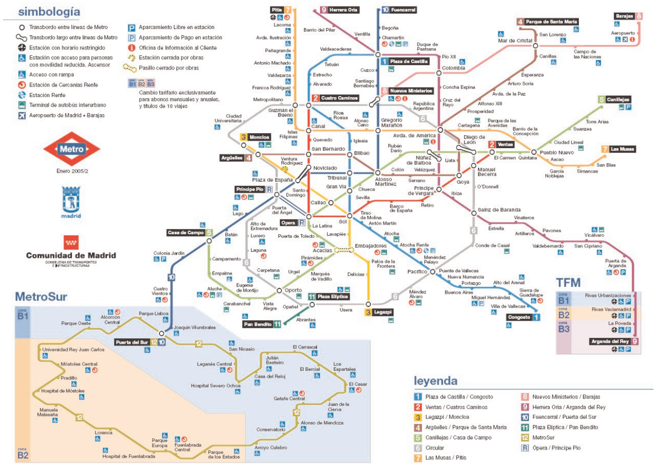

Figura 1. Plano de la Red del Metro de la Comunidad de Madrid

Este plano es un ejemplo espléndido de la topología en acción e ilustra el tremendo poder de esta rama de las matemáticas. Si tomamos un mapa a escala de la ciudad de Madrid, y lo superimponemos a este plano de la red del metro, nos daremos cuenta no sólo de que no casan el uno con otro, sino que, además, el plano del metro no se ajusta en absoluto a la realidad física de la red de vías salvo en dos aspectos: respeta el orden

**Capi Corrales Rodrigáñez**
*enuncuadrado.suma@fespm.org*

en que las paradas están situadas en la red y las conexiones entre las distintas líneas. Todos los demás detalles les ignora y, sobre todo, no es fiel ni a distancias ni a direcciones. Ni está dibujado a escala, ni reproduce la trayectoria real del entramado. Sin embargo, esto no supone ningún problema para los viajeros. Que donde en el mapa aparece una línea recta, en el recorrido real haya diez curvas, o que la distancia entre dos paradas sea más o menos larga de lo que el plano parece indicar, es irrelevante a la hora de guiarse por el mapa para viajar en el metro por Madrid: la única información importante a la hora de programar un trayecto, la única información que es necesario que el plano dé con toda exactitud, es el nombre de los lugares donde subir y bajar y el nombre de las paradas en las que hacer trasbordo y cambiar de línea. Y esos dos detallos son, precisamente, los que se garantizan al respetar el orden y las conexiones en la gráfica (una gráfica es un conjunto de puntos o vértices y de líneas que los unen) que representa la red del Metro de la Comunidad de Madrid.

Si imprimiésemos este plano sobre una hoja de goma elástica y le fuésemos deformando hasta hacerle coincidir con la forma real del entramado de las vías, la configuración esencial de la gráfica no cambiaría, y el plano no resultaría ni más ni menos útil para los viajeros que antes. Lo mismo sucede con cualquier gráfica que dibujemos sobre un soporte elástico. Podemos estirar, podemos contraer, podemos doblar, pero mientras no rompamos nada, no alteraremos su configuración y se tratará, esencialmente, de la misma gráfica.

En el lenguaje de las matemáticas esta característica se describe diciendo que la configuración de una gráfica es una *propiedad topológica*, o bien que las gráficas son *objetos topológicos*. Con ello queremos decir que las gráficas son objetos que podemos estirar, contraer y deformar, y mientras no las rompamos ni les añadamos puntos o líneas nuevas, su configuración permanecerá inalterable.

Siempre que nos encontremos ante cualquier situación en la que la única información relevante sea cuántos objetos hay y cómo están conectados, un modelo topológico será el que mejor describa la situación. El plano de cualquier medio de transporte público, los circuitos eléctricos, los circuitos neuronales, los *chips* de ordenador, las redes telefónicas o la red Internet, son ejemplos de objetos topológicos.

La primera persona que resolvió un problema matemático haciendo topología fue el suizo Leonard Euler en el siglo XVIII. Mientras Euler vivía en San Petersburgo, trabajando como matemático en la corte de Catalina la Grande, llegaron a sus oidos noticias del siguiente problema: En aquel entonces, el río Pregel tenía un curso muy sinuoso al atravesar Königsberg y parece ser que siete puentes atravesaban su recorrido por la ciudad (que entonces era parte de Alemania, concretamente de Prusia y hoy lo es de Rusia con el nombre de Kaliningrad). Cuatro de ellos unían ambas orillas con la pequeña isla de Kneiphof (dos con cada orilla), un quinto puente unía Kneiphof con una segunda isla más grande y los puentes sexto y séptimo unían ésta con la tierra firme de ambos lados.

Cuenta la historia que uno de los entretenimientos favoritos de los habitantes de Königsberg era discutir el recorrido a seguir por una persona para dar un paseo por el pueblo cruzando una única vez cada uno de los siete puentes. Para empezar, nadie sabía si ese paseo era posible o no, pues nadie lograba diseñar un trayecto que recorriese una y sólo una vez cada uno de los siete puentes. En 1735 Euler presentó una memoria ante la Academia Rusa de San Petersburgo, en la que demostraba la imposibilidad de llevar a cabo un paseo por el pueblo de Koenisberg siguiendo las normas establecidas: pasar una vez, y solo una, por cada puente. Lo primero que hizo Euler fue llevar a cabo lo que podríamos llamar una *tarea de limpieza*: deshacerse del exceso de información seleccionando los datos esenciales de la situación e ignorando los detalles que sólo contribuyen a añadir ruido mental y confusión. La solución del problema no depende de la forma de los trozos de tierra ni de la distancia entre ellos, concluyó, sino de que estén o no conectados por puentes, unos puentes cuya forma y tamaño también resulta irrelevante. Lo único que importa es cuántos trozos de tierra hay, y si estan conectados entre sí o no. Llevando a cabo, muy elegantemente, lo que en matemáticas llamamos un proceso de abstracción, Euler simplificó la cuestión hasta reemplazar la tierra por puntos, los puentes por líneas que unen los puntos, y la situación por una gráfica.

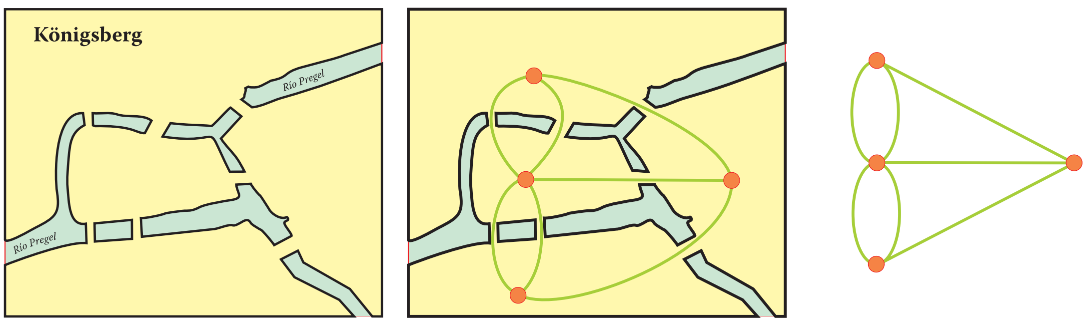


Figura 2. Los Puentes de Königsberg

Una vez que tenemos la gráfica, podemos, como hizo Euler, traducir el problema de Königsberg en una pregunta sobre la gráfica, y olvidarnos de puentes y río. ¿Podemos recorrer esta gráfica de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel? (recorrer una gráfica, consiste en pasar por todas sus líneas una sola vez). Antes o después, caeremos en la cuenta de que la respuesta está en el número de lineas que concurren en cada vértice, y por lo tanto sólo depende de la configuración de la gráfica. En efecto, supongamos que hay un recorrido que cumple con los requisitos, y que además empieza y acaba en el mismo punto. Puesto que cada vez que llego por una línea a un vértice tengo la posibilidad de salir de él por otra línea que no ha sido utilizada aún, las líneas que concurren en cada vértice puden ser emparejadas. Dicho con otras palabras, en todos los vértices tendrá que concurrir un número par de líneas.

Y lo mismo ocurrirá en todos los casos que queramos construir una gráfica se puede recorrer empezando y acabando en un mismo punto solo si en cada vértice de la gráfica concurren un número par de líneas. Y si la gráfica contiene, como mucho, dos vértices en los que concurren una cantidad impar de líneas, entonces podremos recorrerla, pero no podemos terminar el recorrido en el mismo punto donde empezamos. En su memoria Euler demostró que el comportamiento que acabamos de describir es, de hecho, una regla general que ocurre siempre. Se trata de lo que en matemáticas llamamos un teorema: una verdad.

La solución de Euler es de alguna manera geométrica, porque se basa en propiedades de las figuras involucradas: las orillas, las islas y los puentes. Pero no en las propiedades usuales en geometría, el tamaño y la forma, sino de algo tan impreciso como que estén o no adheridas unas a otras. Aunque la idea de Euler de prestar atención a otras propiedades de las figuras distintas de tamaño y forma (como, por ejemplo, la configuración que forman sus adherencias) era brillante, y de hecho, abrió una nueva puerta en el edificio de las matemáticas, la puerta de la Topología. En el siglo XVIII las matemáticas estaban fundamentalmente dedicadas al desarrollo del cálculo y al análisis y el nacimiento de la nueva rama pasó bastante despercibido.

Ya en el siglo XIX, el físico Kirchhoff (que, curiosamente había nacido en Königsberg, en 1824) se dió cuenta de que los problemas relacionados con la ramificación y el entrelazado de cables en los circuitos eléctricos eran problemas que podían resolverse mejor siguiendo la estrategia de Euler (describir los circuitos de conexiones y cables mediante gráficas de puntos y líneas y estudiar las propiedades de esas gráficas), y con ello dio un empujón muy grande a la topología, que fue creciendo a lo largo del siglo XIX poco a poco, pues llevó mucho tiempo entender y poner en palabras en qué consistía la nueva manera de mirar y de hacer. Aunque las ideas básicas de la topología son muy simples, trabajar con ellas es muy difícil. ¿Como medir, comparar o relacionar figuras y situaciones si no importan tamaños ni formas? ¿Cómo describir y representar los resultados de nuestras observaciones?

> *A la topología se la conoce por muchos nombres, las matemáticas de la plastilina, las matemáticas de la goma elástica, las matemáticas de los espejos de feria. Son las matemáticas de la continuidad, las matemáticas que estudian las propiedades de las figuras que permanecen inalterables bajo los cambios graduales.*

A la topología se la conoce por muchos nombres, las matemáticas de la plastilina, las matemáticas de la goma elástica, las matemáticas de los espejos de feria. Son las matemáticas de la continuidad, las matemáticas que estudian las propiedades de las figuras que permanecen inalterables bajo los cambios graduales, cambios que, como el estirar una superficie elástica sobre la que hemos dibujado el plano de una red de metro, tienen lugar poco a poco y sin alteraciones dramáticas ni súbitas. Alteraciones dramáticas y súbitas en matemáticas se llaman discontinuidades. Los cambios pausados y graduales, contínuos. Un alfarero sentado en un torno va transformando de manera contínua una bola de barro en un plato, un vaso o un jarrón. No importa el tamaño ni la forma que tenga el objeto. Si se puede producir a partir de una bola de una forma continuada, para la topología se trata de una misma cosa. Un plato, un vaso o un jarrón son objetos topológicamente equivalentes. Para producir una taza con asa a partir de una bola de barro, el alfarero tendrá que producir un agujero, tendrá que romper adherencias. No podrá hacerlo sin cortar, sin discontinuidades, sin cambios abruptos. Pero una vez que tenga hecho el agujero en la bola, una vez que tenga una rosquilla entre las manos, podrá sin problema y con suavidad convertirla en una taza, un cilindro o el marco de un cuadro, todos ellos objetos equivalentes desde el punto de vista topológico.

La topología es un tipo de geometría, puesto que trabaja con figuras, pero una geometría en la que tamaños y formas no se tienen en cuenta. Una goma elástica, de las que utilizamos en el pelo, puede ser deformada de manera contínua en infinidad de polígonos distintos: triángulos, paralelogramos, etc. Todas esas formas geométricas para la topología son solo una. En la geometría usual, dos figuras son iguales si al colocar una sobre otra coinciden; en topología dos figuras son iguales si podemos transformar una en otra de manera continuada, sin crear nuevas adherencias ni romper las que haya. La geometría clasifica las figuras por su forma o tamaño; la topología, por sus adherencias y la posición relativa de unos puntos respecto a otros.

¿Cuáles son para la topología las características de una figura o superficie? El número de caras, el número de agujeros, si tiene o no interior y exterior, si tiene o no tiene borde, el número de trozos distintos que la componen, y ese tipo de cuestiones, cuestiones que, como ya se ha mencionado, empezaron a estudiarse con precisión a lo largo del siglo XIX. Uno de los matemáticos que se dedicó a investigar en la nueva disciplina fue el matemático alemán Ferdinand Möbius (1790-1868). Möebius, con sesenta y ocho años de edad, en 1858, descubrió la banda que lleva su nombre (descubierta también por Johann Benedict Listing, independientemente, unos meses antes). La idea le surgió durante una investigación en la geometría de los poliedros, que preparaba para presentarse a un premio de la Academia de París.  En la memoria en que describe estos trabajos, Möbius nos explica cómo construir la superficie que ahora lleva su nombre: *tómese una tira larga de papel, sujétese un extremo con una mano y con la otra, rótese primero la banda ciento ochenta grados y luego acérquese el segundo extremo al primero, haciendo casar las esquinas correspondientes.*

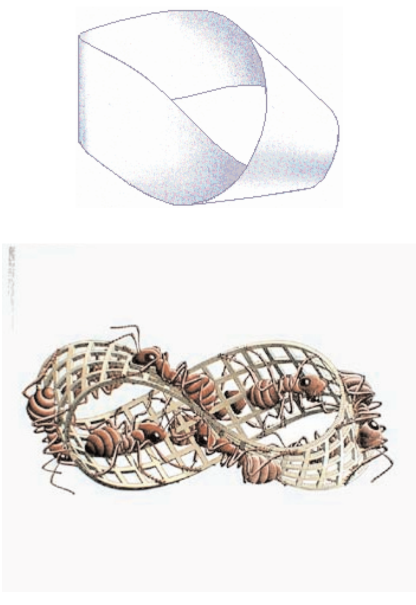

Figura 3. Las bandas de Möebius y de Escher

La banda de Möbius, como se la llama hoy en día, tiene una propiedad interesante: no es orientable, no tiene interior y exterior. Dicho de otra manera, sólo tiene una cara. Este hecho lo podemos comprobar si ponemos un dedo o un lapicero en cualquier punto de la cinta y lo deslizamos en cualquiera de las dos direcciones posibles: tras recorrerla en su totalidad, acabaremos regresando al punto de partida. Pero sigamos pensando, sigamos haciendo topología. ¿Que ocurriría si en vez de tratarse, como en el grabado de Escher, de hormiga enorme, fuese una hormiga muy, muy pequeña la que estuviese caminando a lo largo de la cinta de Möbius? Pues que no notaría ninguna diferencia entre ésta y cualquier cinta cilíndrica: localmente, la banda de Möbius no se distingue de cualquier otra cinta. Sus propiedades y perspectivas locales son completamente comunes. Es en el paso a lo global donde está la diferencia, es globalmente que distinguimos entre la banda de Möbius y la cinta del radiador de un coche. Para apreciar sus peculiaridades, hemos de abandonar su superficie y mirarla desde fuera, mirarla desde el espacio tridimensional euclídeo, por ejemplo.

Una vez en el espacio, la pregunta natural a hacerse es si existen en él más superficies cerradas que se comporten como la banda de Möebius. La respuesta es que sí. La más famosa de estas superficies es la *botella de Klein*, una superficie descubierta por el matemático alemán Félix Klein que además de tener una única cara no tiene borde y tampoco tiene interior ni exterior: esto es, interior y exterior coinciden. Teóricamente, podemos construir una botella de Klein con dos bandas de Möbius, pegando una a otra alrededor de sus bordes. Pero esto es sólo teoría, porque en la práctica  es imposible llevar a cabo esta construcción en nuestro espacio usual tridimensional: la botella de Klein habita en un espacio de cuatro dimensiones. Lo máximo que podemos hacer es construir modelos en cristal o plástico en los que se permite que la botella se atraviese a sí misma y que nos dan una idea de cómo sería la botella caso de poder ser construida.

Figura 4. *Klein Bottle Playground*, Vito Acconci, 2000

*No es extraño que la banda de Möbius y la botella de Klein hayan inspirado todo tipo de piezas en los últimos cien años.*

Además de sus aplicaciones prácticas en la industria, para ampliar la duración de cintas de vídeo o para reducir el desgaste en cintas transportadoras, esta propiedad de tener una única cara resulta tremendamente atractiva, porque supone todo un reto a nuestras preconcepciones sobre figuras y formas. Por eso no es extraño que la banda de Möbius y la botella de Klein hayan inspirado todo tipo de piezas en los últimos cien años. Pensemos en los cuentos de A.J. Deutcsh (*A subway named Möbius*, por ejemplo, de 1950, obra en la que se basa la película de Eduardo Mosquera *Moebius*), Lewis Carroll (*Sylvia y Bruno*, 1889) y Juan José Arreola (*Botella de Klein*, 1971) o las composiciones musicales de Nicolas Slonimsky (*Möbius Strip Tease*, 1965), Alexandr Radvilovich (*Möbus Band*, 1999) y Arnold Schoenberg (*Style and Idea*). Pero es en el mundo de la arquitectura, las artes plásticas y del diseño gráfico donde la influencia de estas piezas matemáticas es más patente. El número de compañías de reciclado y recogida de basuras por todo el mundo que tienen en su anagrama una banda de Móbius es enorme, y los edificios, esculturas y piezas tanto que reproducen banda o botella, como que las toman como punto de partida, son cada vez mayores[1].

Figura 5. Rincón hexagonal (2004), Blanca Muñoz, Madrid

Figura 6. *Túnel* (2004), Blanca Muñoz, Madrid

Figura 7. *Möbius bench* (2001), Vito Acconci, Tokyo

En 1887, el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio de 2.500 coronas a quien encontrase respuesta a una pregunta fundamental para la astronomía, en ese momento una ciencia en boga: *¿Es el estable el sistema solar?* El premio lo ganó el matemático francés Henri Poicaré con su ensayo *Sobre el problema de tres cuerpos y las ecuaciones dinámicas* (1890). Aunque en su trabajo Poincaré no consiguió contestar a la pregunta propuesta, avanzó tantísimo en la investigación del movimiento de los cuerpos celestes y de la estabilidad de los sistemas dinámicos complicados, que se le dió de igual manera el premio.

Poincaré hizo lo mismo que Euler cuando se enfrentó a los puentes de Könisberg: comenzar por simplificar el problema. ¿Qué es un sistema estable? Un sistema (como el sistema solar, el sistema nervioso o un ecosistema), es una colección de cuerpos y relaciones entre esos cuerpos, y cuando un sistema no cambia mucho bajo el efecto de perturbaciones pequeñas, se dice que es estable. Para saber si un sistema es estable o no, tendremos que producir pequeñas perturbaciones y estudiar cómo afectan éstas a los cuerpos y relaciones que formen el sistema que estemos estudiando. En el caso del sistema solar, habrá que estudiar cómo las distintas perturbaciones afectan a los movimientos de los planetas, que son movimientos periódicos. Esto quiere decir que un planeta recorre una trayectoria fija, en la que pasa por un mismo punto cada cierto periodo fijo de tiempo. Para saber si su movimiento se ve alterado o no por una perturbación, tendremos estudiar el efecto de la perturbación en su trayectoria, ¿deja de ser periódica?, ¿cambia el tiempo que el planeta tarda en recorrerla?

*Poincaré se dió cuenta de que el que una curva sea cerrada o no, no tiene nada que ver con cómo sea de larga ni cuál sea su recorrido. El que sea cerrada es, por lo tanto, concluyó, una propiedad topológica de la curva.*

Si queremos saber si la órbita de un planeta es periódica o no, no hace falta que sigamos su movimiento constantemente, basta con que identifiquemos su posición en un momento dado, fijemos el telescopio en ese punto del espacio y esperemos a ver si vuelve a pasar por él, midiendo el tiempo que tarda en hacerlo; si el planeta vuelve a regresar al mismo punto, es que su recorrido recorre una curva cerrada.

Poincaré se dió cuenta de que el que una curva sea cerrada o no, no tiene nada que ver con cómo sea de larga ni cuál sea su recorrido. De hecho, el que una curva sea cerrada no depende de su tamaño ni de su forma, y es, por lo tanto, concluyó Poincaré, una propiedad topológica de la curva, como la configuración es una propiedad topológica de una gráfica. Y haciendo topología fue como Poincaré ganó las 2500 coronas ofrecidas por el rey sueco.

Poincaré dedicó muchos años de su vida a desarrollar la topología, marcando, de alguna manera, las líneas generales que durante casi cincuenta años siguió esta disciplina. Se necesitaban nuevas palabras, nuevas herramientas y nuevos sistemas para codificar información, y el proceso de su construcción fue lento y difícil. Durante la primera mitad del siglo XX la topología se convirtió en una disciplina muy abstracta, sin conexión aparente con la realidad física de la que había surgido. No fue sino hasta mediada la década de los sesenta que se terminaron de identificar y colocar en su sitio las piezas esenciales, y la topología pudo ser utilizada de nuevo por la matemática y la física para entender y describir las reglas de la naturaleza.

El mensaje de Poincaré, como el de Hausdorff (ver SUMA n.º 47), estaba claro: no se trata de contar (como se hacía en la antigüedad: *todo es número*, nos cuenta un mito clásico), ni de medir (como se hacía en el Renacimiento: *todo es medible*, creían los renacentistas). Se trata de relacionar (como hace la matemática desde el siglo XX) allá donde se puede, que no es en todas partes.

Este nuevo punto de vista llevó a un intenso análisis en la esencia más abstracta de figuras y cuerpos, un estudio que fue llevado a cabo en matemáticas a principios del siglo XX (Poincaré, Hausdorff, Brouwer, Emmy Noether, Hopf, etc.) y que, al responder a una manera de mirar propia de su tiempo, queda muy bien reflejada en la obra de algunos de los pintores de la época.

> A los nuevos artistas-pintores se les han reprochado vivamente sus preocupaciones geométricas.
>
> Sin embargo, las figuras de la geometría son la base del dibujo. La geometría, ciencia que tiene por objeto el espacio, su medida y sus relaciones, fue en todo tiempo la regla misma de la pintura.
>
> Hasta ahora las tres dimensiones euclidianas bastaban a las inquietudes que el sentimiento de lo infinito despertó en el animo de los grandes artistas.
>
> Ciertamente, los nuevos pintores no se proponen, en mayor medida que los antiguos, ser geómetras.
>
> Pero se puede decir que la geometría es a las artes plásticas lo que la gramática es al arte del escritor.
>
> Hoy los sabios ya no se atienen a las tres dimensiones de la geometría euclidiana. Los pintores se han visto llevados naturalmente, y, por así decirlo, intuitivamente, a preocuparse por nuevas medidas posibles del espacio que, en el lenguaje figurativo de los modernos se indican todas juntas brevemente con el termino de cuarta dimensión. [...]
> Cuatro tendencias se han manifestado actualmente en el cubismo tal como yo lo he analizado. Dos de ellas son paralelas y puras.
>
> El cubismo científico es una de las tendencias puras. Es el arte de pintar composiciones nuevas con elementos tomados, no de la realidad visual, sino de la realidad del conocimiento.
>
> Todo hombre tiene el sentido de esta realidad interior. No es preciso ser culto para concebir, por ejemplo, una forma redonda.
>
> El aspecto geométrico que tan vivamente impresionó a quienes vieron las primeras telas científicas derivaba del hecho de que la realidad esencial se ofrecía en ellos con gran pureza y se eliminaba totalmente el elemento visual y anecdótico.

> Los pintores que pertenecen a esta tendencia son: Picasso, cuyo arte luminoso se relaciona también con la otra corriente pura del cubismo; Georges Braque, Metzinger, Albert Gleizes, la señorita Laurencin y Juan Gris.
>
> El cubismo físico, que es el arte de pintar composiciones con elementos extraídos en su mayor parte de la realidad virtual. (Apollinaire, 1913, secciones.III , VII)

Uno de los pintores que con más intensidad y de manera más consciente estudió la naturaleza abstracta de las formas, buscándolas en los diversos objetos, fue Juan Gris.

> Juan Gris llamaba a esta manera de pintar poética y, en sus exposiciones, se colocaba junto a los cuadros y los decoraba con rimas y metáforas, como él las llamaba, señalando al atónito observador similitudes que éste no había percibido antes. *¿No cree que la boca de esta jarra se parece a la pera, la que está a su lado? ¿La copa al as de corazones? Las cosas están encadenadas por relaciones* ([Kah], pág. 86).

Figura 8. *Guitarra y periódico*, J. Gris, 1925, MCNAC Reina Sofía

Montañas, guitarra, periódicos, partitura, jarrón, pera, contraventana... Sin llegar al extremo de sus contemporáneos topólogos, para los cuales un círculo y un triángulo eran figuras equivalentes, Juan Gris no sólo ignoraba tamaños a la hora de establecer relaciones entre las diversas figuras, sino que además tampoco les exigía mantener sus proporciones a escala. Para Gris, dos triángulos encadenados componen siempre la misma forma, sin importar lo grandes o pequeños que sean, ni el tamaño de los ángulos que encierran. Las formas de la montaña, las diversas partes de la guitarra y el canto del jarrón en este cuadro, por ejemplo, no casan a escala, y sin embargo aparecen claramente destacadas como equivalentes por Gris en su lienzo y, de hecho, como equivalentes las reconocemos al mirar el cuadro. Y lo mismo ocurre con las formas ovales básicas que aparecen destacadas como equivalentes en el cuadro siguiente.

Figura 9. *Guitarra ante el mar* (1926), MNCAC Reina Sofía

La tremenda elaboración abstracta que sobre las diversas formas llevó a cabo la cultura occidental a lo largo de la primera mitad del siglo XX, cuajó en la década de los sesenta. En pintura, esta cristalización dió lugar a movimientos como el expresionismo abstracto, por ejemplo (espléndidamente representado por la obra de Esteban Vicente que puede verse en el Museo de Arte Contemporáneo de la ciudad de Segovia). En matemáticas, uno de los ejemplos más llamativos es precisamente el que ofrece la topología: como ya se ha mencionado, identificadas (y colocadas en su lugar), por fin, las piezas esenciales, la matemática y la física pudieron volver a utilizar sus herramientas para entender y describir las reglas de la naturaleza. Y no solo eso. A partir de los años sesenta del siglo pasado, la topología se fue convirtiendo en herramienta fundamental de prácticamente todas las disciplinas matemáticas, permitiendo poner estructuras en situaciones donde no las había, y permitiendo de esta manera que se diese de cohesión y cuerpo a mucha de la matemática que se estaba desarrollando. Basta pensar, por ejemplo, además de en los sistemas dinámicos ya mencionados, en cómo ha cambiado la topología disciplinas como la teoría de los números (los cuerpos locales o teoría de cuerpos de clases, por ejemplo) o la geometría algebraica (haces, esquemas, variedades, etc.).

Un momento crucial en esta cristalización que la topología experimentó a mediados del siglo XX, fue el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Amsterdam en 1954, un congreso muy significativo para la historia que estamos relatando. Por un lado, en él se otorgaron las medallas Fields a Jean Pierre Serre (Francia) y Kunihiko Kodaira (Japón), dos de los matemáticos que con mayor éxito han utilizado las herramientas de la topología para resolver problemas en campos como la geometría algebraica, la teoría de números o el análisis. Por otro lado, en ese congreso y en una conferencia con el título Teoría general de los sistemas dinámicos y la mecánica clásica, el matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov presentó a la comunidad internacional las ideas esenciales de la llamada después teoría de KAM (por Kolmogorov, Arnold y Moser): cómo utilizar —con éxito, como el tiempo ha demostrado— la maquinaria de la nueva y abstracta topología, para estudiar los problemas clásicos de los sistemas dinámicos. Y, finalmente, fue precisamente durante una visita a la exposición sobre la obra de Escher que con motivo de este congreso se organizó en Amsterdam, que el matemático inglés Roger Penrose vió por primera vez el grabado *Beldevere*.

Figura10. *Beldevere*, Escher

En 2004, Marta Rafols, de la Fundació La Caixa, me invitó a dar una serie de conferencias sobre Escher y las matemáticas con motivo de una exposición antológica que la Fundació presentó en algunos de sus centros en Cataluña. Buscando en las galerías de arte de Internet imágenes de grabados de Escher con los que ilustrar las ponencias, encontré un texto anónimo (que no he sido capaz de volver a encontrar) junto a una reproducción de este grabado, que decía (reproduzco las notas que tomé en mi cuaderno): *Cuando a mediados de los años cincuenta del siglo pasado Roger Penrose vió este grabado en una exposición que se organizó con motivo de un Congreso Internacional de Matemáticas, quedó fascinado, y una vez en Inglaterra, junto con su padre Lionel, un profesor de genética que usaba las matemáticas en su trabajo y también las estudiaba como hobby, se dedicaron a investigar figuras imposibles. Poco después padre e hijo enviaron una carta a Escher con alguna de estas figuras*. No se daba ninguna explicación más. El párrafo me intrigó. Durante los años que pasé en la Universidad de Michigan (EEUU), el matemático inglés John Conway solía visitar el departamento de matemáticas con cierta regularidad, y aprovechaba estas ocasiones para dar cursos a los alumnos del programa de doctorado de teoría de números, entre los que yo me encontraba. Sus clases estaban siempre salpicadas con anécdotas y juegos en los que antes o después, acaba surgiendo el nombre de Penrose, que acabó convirtiéndose en un mito para nosotros. ¿Qué vió el maestro de John Conway en este grabado que tanto le atrajo?, me pregunté inmediatamente, estudiándole con cuidado. La arquitectura es curiosa, y sin duda imposible. Pero no acaba de funcionar; resulta plana, burda, no es de las piezas más sugerentes llevadas a cabo por Escher. No, no puede ser la construcción del edificio Beldevere lo que llamó tanto la atención del sabio inglés, pensé.

La reproducción no era muy buena, y busqué en el catálogo de la exposición de la Caixa que Marta Rafols me había enviado junto con la invitación (Antich, 2004). En el índice, efectivamente, encontré el nombre Beldevere. Pero para mi sorpresa, cuando abrí la página correspondiente no encontré lo que me esperaba. Aunque había mantenido el mismo título, en este delicioso grabado —una de las piezas más hermosas del holandés—, Escher representaba sólo un detalle de la escena: la imagen de un hombrecillo sentado en un banco y sosteniendo entre las manos un cubo imposible. No me cupo la menor duda de que ese cubo fue lo que atrajo inmediatamente la atención de Penrose.

Figura 11: El cubo de las costillas de Escher

Efectivamente, como escuché explicar más tarde al propio Penrose (hijo) en el vídeo sobre Escher, realizado por Michele Emmer (2001), Lionel y Roger Penrose cayeron, como tantos otros, bajo el hechizo del cubo de las costillas, como le llamaba Escher. Un cubo que tiene la peculiarísima propiedad de que, como le ocurre a la banda de Mobius, sus propiedades locales y globales son muy distintas. La banda de Möbius localmente es plana y orientable, mientras que globalmente ni es plana (está cerrada en el espacio) ni es orientable (pues tiene una única cara); el cubo de las costillas localmente es un cubo normal y corriente (si enfocamos la imagen en cualquiera de sus vértices, no encontramos ninguna diferencia entre este cubo y la esquina de una habitación, por ejemplo), mientras que globalmente es imposible. No se puede construir materialmente.

Las reflexiones de los Penrose sobre el cubo de Escher les llevaron a construir ellos mismos otras figuras imposibles que luego enviaron al artista (Penrose,1958). Así conoció Escher dos de las figuras que lograron, una vez más, que las matemáticas le permitiesen superar los problemas que sus construcciones le planteaban. La primera de ellas fue el triángulo conocido como *el tribar*.

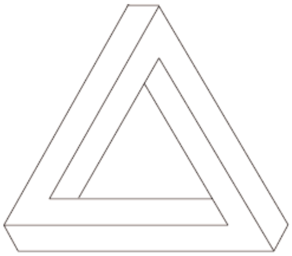

Figura 12. *El tribar* de Penrose

Este triángulo tiene la propiedad de que localmente es un triángulo como otro cualquiera, pero la configuración global, la figura completa, es imposible. De hecho, sus ángulos suman 270º grados en vez de 180º. Gracias a este triángulo, Escher pudo construir una de sus piezas más sorprendentes.

Figura 14. *La cascada*, Escher

La segunda pieza que los Penrose mostraron a Escher fue su escalera, con la que Escher construyó otra de sus imágenes más conocidas.

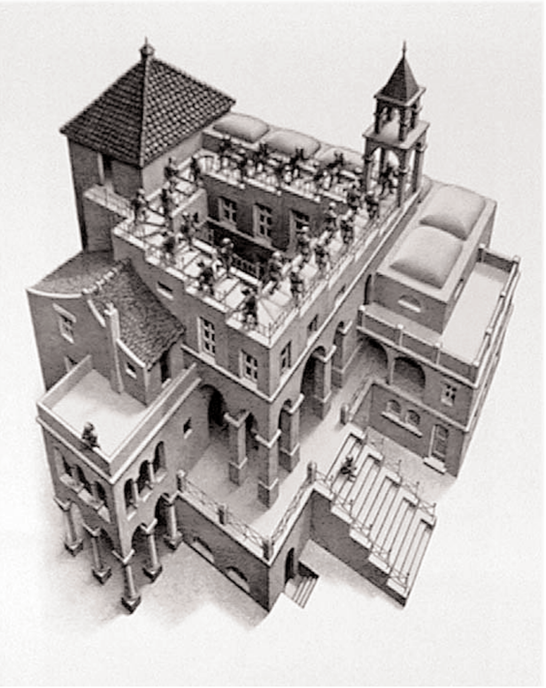

Figura 15. *Subiendo y bajando*, Escher

Estas construcciones de Escher resultan extraordinariamente sugerentes. Nos colocan ante la paradoja de que mundos imposibles puedan ser construidos sobre el papel con toda consistencia, metiéndonos así de lleno en uno de los problemas teóricos con los que se anda peleando hoy la especie: el paso de lo local a lo global. Un objeto puede ser coherente en cada una de sus partes, e incoherente en su totalidad: localmente es plausible, pero la configuración global no lo es. No se podría tener un objeto así en nuestro espacio tridimensional. Podemos dibujarlo, pero no podemos construirlo.

De nuevo la obra de Escher nos sirve maravillosamente para ilustrar lo que las matemáticas nos enseñan. En este caso, que el paso de lo local a lo global, ni es siempre obvio, ni es siempre único, ni es siempre posible. Aunque podamos dibujarlo. ■

## NOTA

1 Agradecemos a Vito Acconci y Blanca Muñoz las fotografías de sus obras que acompañan este artículo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTICH, X.,ed.: *Escher, la vida de las formas,* Fundació La Caixa 2004.

APOLLINAIRE, G.: *Manifiesto cubista,en Méditations esthétiques. Les peintres cubistes (*1913). Traducción al castellano:
www.ideasapiens.com/textos/ Arte/manifiesto%20cubista.htm

EMMER, M.: *El mundo fantástico de MC Escher*, video, 2001.

KAHNWEILER, D.-H: *El camino del Cubismo* (1963), Quaderns Crema. Barcelona, 1997.

PENROSE, R.: *Carta a Escher*, 1958.