

Exploraciones matemáticas del mundo

Capi Corrales Rodríguez

Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas Universidad Complutense de Madrid 28040 Madrid
capi@mat.ucm.es

Para José María Montesinos Amilibia



Fig. 1: Amadeo Olmos 2011

1. Introducción

“La filosofía¹ está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.” (Galileo Galilei, *Il saggitore*, cap. 6-4.)

No hay más que entrar en el despacho de José María Montesinos, asistir a una de sus conferencias o leer alguno de sus trabajos científicos, para saber que es uno de esos exploradores que utilizan las matemáticas para cartografiar el mundo. Uno de los grandes constructores de mapas del universo, fue el matemático Johannes Kepler (1571-1630), contemporáneo de Galileo y voraz lector del libro de la naturaleza. Kepler dedicó su vida a buscar estructuras e ideas tras las cosas que hiciesen posible utilizar las matemáticas para describirlas y/o entender por qué son como son.

¹En época de Galileo, sinónimo de conocimiento.

“En tiempos de ansiedad e incertidumbre como los nuestros, cuando tan difícil es sentir satisfacción por el curso de la humanidad, resulta particularmente consolador pensar en un hombre tan excepcional y sereno como Kepler. [...] Al parecer, la mente humana ha de construir primero las formas de modo independiente, para luego poder hallarlas en las cosas. Las verdaderas proezas de Kepler son un ejemplo magnífico de esta afirmación: el conocimiento no puede surgir de la experiencia tan sólo, sino de la comparación de las invenciones del intelecto con los hechos observados. (A. Einstein, *Johannes Kepler*, [3], p. 254.)

En 1610, Kepler escribió *Sobre el copo de nieve de seis picos. Un regalo de Año Nuevo* ([6]), un delicioso tratado tan corto en extensión como rico en ideas. Considerado hoy precursor de los estudios de glaciología y mineralogía cristalina, este breve tratado marca un hito en el uso de las matemáticas para entender el mundo físico que nos rodea. En él, Kepler describe el recorrido de preguntas y reflexiones que siguió en su estudio de los copos de nieve y, de paso, ilustra elegantemente cómo formular en lenguaje matemático nuestras reflexiones y preguntas sobre la naturaleza.

En el proceso de analizar lo que él denomina *la facultad formativa que actúa en el universo* –concretamente en la formación de los copos de nieve–, Kepler nos lleva a leer con nuevos ojos –matemáticos– textos como *El Timeo* de Platón, *Elementos* de Euclides, o el Libro V de *Colección* de Pappus. En matemáticas, las buenas soluciones a problemas se caracterizan por dar lugar, casi de inmediato, a nuevas preguntas. Las respuestas que Kepler encontró en estas obras clásicas a algunas de sus dudas, le llevaron a proponer(se) nuevos retos que describe –algunas veces incluyendo la solución– en *El copo de nieve de seis picos*. El descubrimiento de dos nuevos poliedros semirregulares, los primeros enunciados de las famosas Conjetura de Kepler y Conjetura del Panal y la primera manifestación escrita que conocemos de la relación entre la serie de Fibonacci y la proporción áurea, son algunas de las joyas que podemos disfrutar en este tratado. Todas ellas, de una manera u otra, están relacionadas con los temas que José María Montesinos Amilibia encara en sus investigaciones. Es por esto que se me ha ocurrido utilizar el tratado de Kepler como punto de partida a partir del cual elaborar, como regalo a José María, un pequeño recorrido por algunos textos escritos por quienes le precedieron en sus exploraciones geométricas del universo².

Agradezco a Amadeo Olmos (Segovia) que me haya permitido reproducir algunas de sus obras en este trabajo, a Fernando Porqueras (Gabinete Informático, Facultad de Matemáticas, UCM) su ayuda técnica y a José Manuel Gamboa (Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas, UCM) la revisión de la primera versión de este texto.

²Muchas de las citas originales que aparecerán en estas páginas, las he traducido al castellano yo misma a partir las traducciones al inglés o francés recogidas en la bibliografía

2. El recorrido

“Sé muy bien lo partidario que es usted de Nada... Por lo que puedo deducir fácilmente que tanto más grato le resultará un regalo cuanto más se acerque a Nada. Lo que sea, pues, que le agrade a usted por su evocación de Nada, habrá de ser pequeño e insignificante, barato y fugaz – es decir, casi Nada. Y puesto que hay muchas cosas así en el dominio de la naturaleza, hay que elegir una de ellas. Mientras consideraba estas cuestiones con ansiedad, crucé el puente, preocupado por mi falta de civismo al aparecer ante usted sin un regalo de Año Nuevo, excepto, quizás (y por seguir tocando la misma nota), el que siempre le llevo . . . o sea, Nada. Tampoco era capaz de pensar en algo que siendo cercano a Nada, diese lugar a sutil reflexión. Justo entonces, por feliz ocurrencia, parte del vapor del aire se acumuló en nieve por la fuerza del frío, y unos cuantos copos dispersos cayeron sobre mi abrigo, todos con seis picos y radios moñudos.



Fig. 2: Amadeo Olmos 2009

¡Por Hércules! Aquí había algo más pequeño que una gota, y sin embargo dotado de forma. Aquí, sin duda, estaba el más deseable regalo de Año Nuevo para el amante de Nada, y uno digno también de un matemático (que Nada tiene, y Nada recibe), pues descende del cielo y se parece a las estrellas. Nuestra pregunta será por qué los copos de nieve, cuando acaban de caer y antes de amontonarse, siempre caen con seis picos y con seis radios moñudos como plumas.

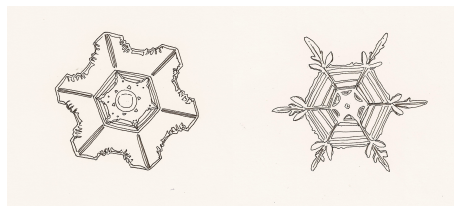


Fig. 3

Utilizaremos algunos ejemplos bien conocidos y los presentaremos de una manera geométrica, pues hacerlo beneficiará enormemente nuestra investigación.

[...] Es manifiesto que las semillas de la granada son presionadas en forma rómbica por la conjunción de necesidad material y el principio de crecimiento de las semillas. Pues las semillas redondas no presionan sin ceder su forma, contra las que tienen enfrente, sino que ceden y son empujadas en los espacios entre tres o cuatro de las semillas que tienen en derredor. En colmenas, sin embargo, la razón es diferente. Pues las abejas no están apiladas de manera confusa como las semillas de una granada, sino que se alinean intencionadamente en posición de batalla, todas sus cabezas señalando en un sentido o el contrario, mientras empujan a la vez contra los fondos de las celdillas. Si la forma de la colmena fuese el resultado de un apilamiento, las celdillas tendrían que cubrir a las abejas a partir del endurecimiento de sus secreciones viscosas, como las conchas crecen alrededor de los caracoles en espiral. Pero está claro que las propias abejas construyen sus panales, levantando toda la estructura desde los cimientos.” (Johannes Kepler, *El copo de nieve de seis picos. Un regalo de Año Nuevo*, [6].)

Se cree que fue la lectura de *Colección*, escrita por Pappus de Alejandría ([7], [8], [9]), lo que despertó la curiosidad de Kepler por la estructura del panal de miel. Pappus comienza el Libro V con el siguiente prefacio.

“La divinidad, querido Megetius, ha otorgado a los hombres la mayor y más perfecta noción de sabiduría en general y de ciencia matemática en particular, y sólo otorgó parcialmente este privilegio a los animales. A los hombres, al haberles dotado de razón, les concedió que hiciesen todo a la luz de la inteligencia y la demostración, y a los otros seres vivos, aunque les negó la razón, les concedió el que consiguiesen todo lo que les fuese vitalmente necesario gracias a un cierto instinto natural. La existencia de este instinto puede ser observado en muchas otras criaturas vivas, pero sobre todo en abejas. Son realmente admirables, en primer lugar, su disciplina y sumisión a las reinas que gobiernan en su estado. Pero mucho más admirable todavía es su emulación, la limpieza con que llevan a cabo la recolección de la miel, y el planificado y maternal cuidado con que la custodian. Probablemente porque saben que los dioses les han confiado la tarea de hacer llegar a parte selecta de la humanidad su ambrosía, no les parece adecuado dejarla caer descuidadamente sobre el suelo, la madera, o cualquier otro material feo e irregular. En vez de ello, tras recolectar los dulces de las más hermosas flores que crecen sobre la tierra, construyen para recoger la miel, los receptáculos que llamamos colmenas, (con celdillas) todas iguales, semejantes y contiguas unas a otras, y en forma hexagonal. Inferimos de la siguiente manera, que han llegado a ello en virtud de cierta planificación geométrica: necesariamente habrán pensado que las figuras habrían de ser contiguas unas a otras, es decir, teniendo paredes communes, de manera que ninguna materia extraña pudiese colarse en los intersticios entre ellas y profanar la pureza de su producto. Habiendo tres figuras con las que es posible recubrir exactamente el plano alrededor de un mismo punto, las abejas, debido a su astucia instintiva, eligen para la construcción del panal de miel la figura con el mayor número de ángulos, porque saben que contendrá más miel que cualquiera de las otras dos.

Volvemos a la lectura de *El copo de nieve de seis picos*. Retomando el estudio de colmenas donde lo dejase Pappus, Kepler analiza la geometría de las celdillas en profundidad.



Fig. 4a

Este fondo (que podríamos llamar la quilla) se une a los seis lados de la celdilla por otros seis ángulos, tres superiores de tres lados intercalados con tres inferiores, de cuatro lados. Hay que añadir que la celdilla están distribuidas en dos capas, con las aberturas mirando direcciones opuestas, los fondos tocándose en un empaquetamiento cerrado; y la punta de cada quilla de una capa encajada en las puntas de tres de las quillas de la otra capa [Fig. 5]. Mediante este diseño, cada celdilla no sólo comparte seis paredes con las que le rodean en su misma capa, sino también tres planos al fondo con otras tres celdillas de la capa contraria.

³Pappus se refiere aquí al hexágono regular, triángulo equilátero y cuadrado inscritos en una misma circunferencia, y a la noción de tamaño para figuras geométricas introducida por Euclides en *Elementos*. Los griegos utilizaban letras para expresar los números, lo que convertía el echar cuentas en una tarea bastante farragosa. Euclides evita introducir conceptos que requieran el uso de números —como área o volumen, por ejemplo—, y define una nueva manera de ser “iguales” dos figuras (planas o sólidas), que luego utilizará para comparar polígonos y poliedros: dos figuras son “iguales” si ambas pueden ser descompuestas en el mismo número (finito) de piezas más pequeñas congruentes dos a dos. Dicho de otra manera, ambas figuras son soluciones de un mismo rompecabezas de piezas planas o sólidas, por lo que podemos pasar de una figura a otra sin más que reordenar las piezas [5].

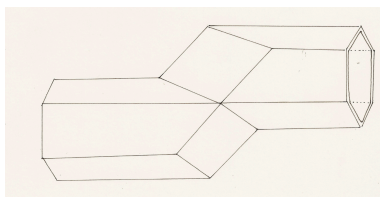


Fig. 5

Así cada abeja tiene nueve vecinas, con cada una de las cuales comparte una pared divisoria. Los tres planos de la quilla son idénticos entre sí y su forma es lo que los geómetras llaman un rombo. Intrigado por estos rombos, empecé a investigar en geometría a ver si se podía construir, utilizando exclusivamente rombos, un sólido como los cinco sólidos regulares y los catorce sólidos de Arquímedes.”

Los sólidos regulares son cuerpos convexos, con polígonos regulares iguales por caras y ángulos iguales en todos sus vértices. Hay una infinidad de polígonos regulares, pero sólo cinco sólidos regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Se les conoce también como los sólidos platónicos, al ser las figuras que usó Platón en el modelo con que describe el universo en el diálogo *Timeo*. Los sólidos de Arquímedes son sólidos ‘semi-regulares,’ formados por polígonos regulares de más de un tipo. Hay trece de ellos (no catorce, como afirma Kepler), y nos han llegado a través del Libro V de *Colección matemática* de Pappus.

“Los filósofos dicen que, con toda razón, el primero de los dioses dio al mundo la forma de una figura esférica, pues se trata de la más bella entre las que existen. Mencionan las propiedades naturales de la esfera y añaden, además, que es la mayor entre todas las figuras con su misma superficie. Todo aquello que afirman en relación con la esfera es obvio y no requiere ninguna demostración; pero cuando afirman que es más grande que otras figuras, los filósofos no lo demuestran y se limitan a afirmarlo; pero esto no es fácil aceptarlo sin un análisis más minucioso. Por ello, y como antes hemos demostrado que el círculo es la mayor entre las figuras poligonales con su mismo perímetro, intentaremos demostrar ahora que la esfera es la mayor entre las figuras sólidas regulares con su misma superficie; pero consideraremos sobre todo las que parecen regulares. No se trata tan solo de las cinco figuras que aparecen en el divino Platón, a saber: el tetraedro y el hexaedro, el octaedro y el dodecaedro y, en quinto lugar, el icosaedro, sino también por aquéllas, en número de trece, descubiertas por Arquímedes, que están limitadas por polígonos equiláteros y equiángulos pero no todos iguales⁴.

Está, de entrada, el octaedro, limitado por 4 triángulos y 4 hexágonos.

Además de este último, hay tres decatetraedros, el primero limitado por 8 triángulos y 6 cuadrados, el segundo por 6 cuadrados y 8 hexágonos, y el tercero por 8 triángulos y 6 octógonos.

⁴Los sólidos semi-regulares o arquimedianos quedan determinados por el número C_K de caras con k lados, el número n_k de caras con k lados que pasan por cada vértice y los números C , A y V de caras, aristas y vértices del poliedro.

Además de estos últimos, hay dos icohexaedros, el primero está limitado por 8 triángulos y 18 cuadrados, y el segundo por 12 cuadrados, 8 hexágonos y 6 octógonos.

Además de estos últimos, hay tres triacontaedros, el primero limitado por 20 triángulos y 12 pentágonos; el segundo por 12 pentágonos y 20 hexágonos, y el tercero por 20 triángulos y 12 decágonos.

Además de estos últimos, hay dos hexecontaedros, el primero limitado por 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos, y el segundo por 30 cuadrados, 20 hexágonos y 12 decágonos.

Y además de todos ellos, el último es el enecontaedro, limitado por 80 triángulos y 12 pentágonos.” (Pappus de Alejandría, *Colección matemática*, Libro V, cap. XIX. [7], pp. 272-273.)

Retomamos la lectura de *El copo de nieve de seis picos* en el punto en que lo dejamos ([6] p. 43).

“Descubrí dos, uno relacionado con el cubo y el octaedro [Fig. 6a], el otro con el octaedro y el icosaedro [Fig. 6b] (el cubo mismo puede ser considerado un tercero, pues es como dos tetraedros unidos). El primero de estos sólidos es contenido por doce rombos, el otro por treinta. Sólo el primero comparte esta propiedad con el cubo: de la misma manera que ocho esquinas de ocho cubos unidas en un único punto llenarán el espacio sin dejar huecos, lo mismo ocurrirá con las esquinas del primer tipo de figura rómbica cuando cuatro de los ángulos obtusos (trilaterales) o seis de los cuadrilaterales se junten.”

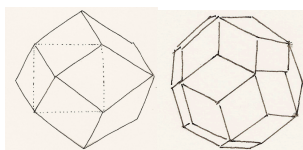


Fig. 6a

Fig. 6b

Es lógica la aparición de figuras con rombos por caras en semillas inicialmente esféricas que al crecer presionan unas contra otras, como en la granada o el guisante, observa Kepler. Pero si se tratase de esferas sólidas, ¿cómo habríamos de colocarlas para optimizar el espacio?, se pregunta (Fig. 7).

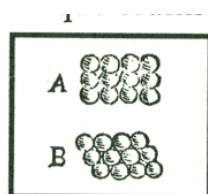


Fig. 7: Diagrama original de Kepler, [6] p. 54

“Si las vas apilando unas sobre otras buscando el arreglo más compacto, habrás de ponerlas o bien en un arreglo cuadrado (Fig. A) o bien triangular (Fig. B).”

Esta afirmación, para la que Kepler no ofrece demostración, se conoce como La Conjetura de Kepler o *del frutero*. Con el tiempo llegó a ser tan importante como para formar parte de uno de los veintitrés problemas que, según la lista elaborada por Hilbert en 1900, marcarían el camino de la investigación matemática a lo largo del siglo 20. Los intentos por demostrar la Conjetura de Kepler dieron lugar a mucha, y muy buena, matemática a través de los siglos, hasta que en 1998 Thomas Hales dió con una demostración que, en lo que a demostraciones matemáticas se refiere, supone un caso excepcional. El argumento de Hales tiene una parte teórica publicada en 2005 ([4]), y otra computacional, tan técnica, que tras años estudiándola los expertos no supieron qué hacer con ella y acordaron incluirla como enlace en la página web de la revista⁵. El famoso diagrama con que Kepler ilustró su conjetura (Fig. 7), trae a la memoria otro diagrama igualmente famoso: el que utilizó Albert Einstein para ilustrar su modelo del universo (Fig. 8).

En el contexto de su trabajo en relatividad, Einstein propuso en 1917 un modelo de universo basado en la 3-esfera ([2]) que cuatro años más tarde describió para un público general en la conferencia *Geometría y experiencia*⁶. En la primera parte de su intervención, Einstein explica qué es lo que, en la teoría de la relatividad, sugiere considerar como modelo de universo un continuo espacio-tiempo cuatridimensional con métrica riemanniana. A continuación, da instrucciones detalladas de cómo llegar a una representación mental de tal continuo (de cuatro dimensiones, finito e ilimitado).

“¿Podemos visualizar un universo finito pero ilimitado? La respuesta habitual a esta pregunta es ‘no’, pero esta no es la respuesta correcta. El propósito de las siguientes reflexiones es demostrar que la respuesta tendría que ser ‘sí’” Quiero demostrar que se puede ilustrar sin gran dificultad la teoría de un universo finito, con una representación mental a la que, con un poco de práctica, pronto nos acostumbraremos.

¿Qué queremos expresar cuando decimos que nuestro espacio es infinito? Tan sólo que podríamos colocar cualquier cantidad de cuerpos de igual tamaño, unos junto a otros, sin llegar a cubrir el espacio.[...] Veamos ahora un ejemplo de un continuo bidimensional que es finito pero sin límites. Imaginemos la superficie de un gran globo y una cantidad de pequeños discos de papel, todos del mismo tamaño. Colocamos uno de los discos en cualquier lugar sobre la superficie del globo. Si desplazamos el disco a voluntad sobre la superficie del globo, en ningún momento del recorrido tropezaremos con un límite. Decimos, por lo tanto, que la superficie esférica del globo es un continuo sin límites.

⁵Detalles sobre la historia de esta demostración pueden encontrarse en <https://ztfnews.wordpress.com/2014/08/14/completada-la-prueba-formal-de-la-conjetura-de-kepler/>

⁶Pronunciada ante la Academia Prusiana de Ciencias el 27 de enero de 1921 y recogida en su libro *Ideas y opiniones*, [3]

Es más, la superficie esférica es un continuo finito. Porque si pegamos los discos de papel sobre el globo de manera que ningún disco se superponga a otro, la superficie de la esfera llegará a estar tan cubierta que será imposible colocar otro disco. Esto significa exactamente que la superficie esférica del globo es finita en relación a los discos de papel.

Y, más aún, la superficie esférica es un continuo no euclídeo de dos dimensiones, es decir, que las leyes de posición de figuras rígidas en ella no concuerdan con las del plano euclídeo. Esto puede demostrarse de la siguiente forma. Tomamos un disco y lo rodeamos, en círculo, por otros seis discos, cada uno de los cuales debe estar rodeado, a su vez, por otros seis discos y así sucesivamente (Fig. 8).



Fig. 8: Diagrama original, [3], p. 237

Si llevamos a cabo esta construcción sobre una superficie plana, obtendremos un patrón ininterrumpido con cada disco tocando otros seis, con excepción de los que estén en la parte externa. En un primer momento, esta construcción también promete éxito sobre una superficie esférica, y cuanto menor sea el radio del círculo en proporción al de la esfera, tanto más prometedora parecerá. Pero según se avanza en la construcción va resultando más patente que la colocación interrumpida de los discos en la manera indicada no es posible, como sí lo era en el caso de la geometría euclídea del plano. Es de esta manera que las criaturas que no puedan abandonar la superficie esférica, y no puedan siquiera echar una ojeada fuera de la superficie esférica hacia el espacio tridimensional, podrían llegar a descubrir, por simple experimentación con los discos, que su “espacio” bidimensional no es euclídeo, sino esférico.

Según los últimos resultados de la teoría de la relatividad, es probable que nuestro espacio tridimensional sea también aproximadamente esférico, esto es, que las leyes de localización en él de cuerpos rígidos no estén dadas por la geometría euclídea, sino en forma aproximada por la geometría esférica, si consideramos partes del espacio que sean suficientemente extensas. Este es el momento en que la imaginación del lector vacila. “Nadie puede imaginar semejante cosa”, exclama indignado. “Una cosa así puede ser dicha, pero no puede ser pensada. Soy capaz de imaginar bastante bien una superficie esférica, pero nada análogo a ella en tres dimensiones. Debemos intentar superar esta barrera mental y el lector paciente verá que no se trata de una tarea especialmente difícil. A tal fin, empezaremos por centrar nuestra atención, una vez más, en la geometría de las superficies esféricas bidimensionales. En la figura adjunta (Fig. 9), sea K la superficie esférica, que toca en S al plano E , representado, por facilitar la presentación, como una superficie limitada. Sea L un disco sobre la superficie esférica.

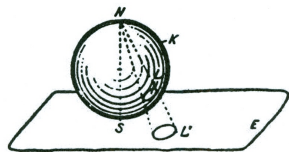


Fig. 9: Diagrama original, [3], p. 238

Ahora imaginemos que en el punto N de la superficie esférica, diametralmente opuesto a S , existe un punto luminoso que proyecta sobre el plano E una sombra L' del disco L . Todo punto sobre la esfera tiene su sombra en el plano. Si movemos el disco sobre la esfera K , también se moverá su sombra L' sobre el plano E . Cuando el disco L está centrado en S , coincide con su sombra. Si se mueve hacia arriba sobre la superficie esférica, alejándose de S , la sombra L' sobre el plano también se moverá hacia la parte externa del plano, alejándose de S y haciéndose más y más grande a medida que se aleje del punto citado. Según el centro del disco L se va aproximando al punto luminoso N , la sombra se va desplazando hacia el infinito y se hace infinitamente grande.

Ahora planteamos la siguiente pregunta: ¿cuáles son las leyes de posición de los discos-sombra L' sobre el plano E ? Es evidente que son las mismas que las leyes de posición de los discos L sobre la superficie esférica, dado que cada figura original sobre K tiene su figura-sombra correspondiente sobre E . Si dos discos se tocan sobre K , sus sombras también se tocarán sobre E . La geometría de las sombras sobre el plano, concuerda con la geometría de los discos sobre la esfera. Si denominamos a los discos-sombra figuras rígidas, entonces la geometría esférica es válida también sobre el plano E para estas figuras rígidas. En particular, el plano es finito con respecto a los discos-sombra, puesto que sólo un número finito de sombras tienen cabida en el plano.

En este punto alguien dirá: “Eso no tiene sentido. Los círculos proyectados no son figuras rígidas. Sólo tenemos que ir moviendo una regla de treinta centímetros por el plano E , para convencernos de que, a medida que se van alejando del punto S hacia el infinito, las sombras del plano van aumentando de tamaño constantemente”.

Pero, ¿qué sucedería si la regla de treinta centímetros se comportase sobre el plano E de la misma manera que los discos-sombra L' ? En tal caso sería imposible demostrar que las sombras crecen en tamaño a medida que se alejan de S y tal afirmación no significaría nada. En realidad, lo único que se puede afirmar objetivamente sobre los discos-sombra es lo siguiente: estos discos están relacionados entre sí en el sentido de la geometría euclídea, exactamente de la misma manera en que lo están los discos rígidos sobre la superficie esférica. Debemos tener muy claro que nuestra afirmación con respecto al crecimiento de los discos-sombra a medida que se van alejando de S hacia el infinito, no tiene significación objetiva en sí, en cuanto seamos incapaces de comparar los discos-sombra con los cuerpos rígidos euclídeos que se mueven sobre el plano E . Con respecto a las leyes de posición relativa de las sombras L' , el punto S no tiene más privilegios especiales sobre el plano que sobre la superficie esférica.

La representación de la geometría esférica sobre el plano que acabamos de ver es importante para nosotros, porque puede ser transferida fácilmente al ámbito tridimensional. Imaginemos un punto S en nuestro espacio y una gran cantidad de pequeñas esferas L' que podemos hacer coincidir unas con otras. Sin embargo, estas esferas no han de ser rígidas en el sentido de la geometría euclídea; su radio ha de aumentar (en el sentido de la geometría euclídea) cuando se muevan hacia el infinito alejándose de S , y ese aumento ha de producirse según la misma ley que determinaba el crecimiento de los radios de los discos-sombra L' sobre el plano.

Una vez tenemos una imagen mental vívida del comportamiento geométrico de nuestras esferas L' , supongamos que en nuestro espacio no existen cuerpos rígidos en el sentido de la geometría euclídea, sino sólo cuerpos que se comportan como las esferas L' , y contaremos con una imagen clara del espacio esférico tridimensional o, mejor aún, de la geometría esférica tridimensional. Ahora son las esferas, las que deben ser llamadas “rígidas”. Como en el caso de los discos-sombra en el plano E , el aumento de su tamaño a medida que se van alejando de S no puede ser detectado con reglas de medición, porque los patrones de medida se comportan del mismo modo que las esferas. Nuestro espacio es finito porque, debido a su “crecimiento”, sólo un número finito de esferas puede tener cabida en el espacio.

De esta manera, apoyándonos en la práctica en pensar y visualizar que nos da la geometría euclídea, hemos construido una representación mental de la geometría esférica. Sería posible, sin gran dificultad, llevar a cabo construcciones imaginarias especiales que diesen mayor profundidad y fuerza a estas ideas. Pero mi único objetivo hoy ha sido demostrar que la facultad humana de visualización no está obligada en absoluto a capitular ante la geometría no euclídea.” (Albert Einstein, [3], pp. 235-240.)

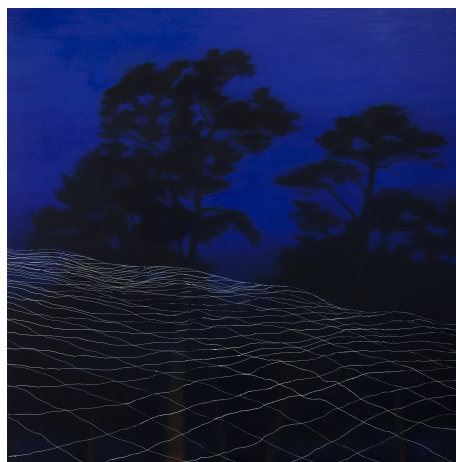


Fig. 10: Amadeo Olmos 2010

En la introducción a su edición de algunos textos de Riemann ([11], p. XCIII), José Ferreirós explica de donde surgió la idea de Einstein de considerar un continuo cuatridimensional finito pero ilimitado:

Es bien sabido —escribe Ferreirós—, que la geometría de Riemann se inscribe en uno de los capítulos más famosos de la historia de la matemática, el desarrollo de las geometrías no euclídeas, y que constituyó un preparativo esencial para la teoría relativista de la gravitación. Puede decirse, abusando de una expresión famosa, que aquí nos encontramos con tres gigantes subidos los unos a hombros de otros: Riemann sobre las espaldas de Gauss, y Einstein encima de aquél. A propósito de este desarrollo de ideas, escribía precisamente Einstein en 1922:

“Los conocimientos matemáticos que posibilitaron el establecimiento de la teoría de la relatividad general, hemos de agradecerlos a las investigaciones geométricas de Gauss y Riemann. El primero investigó en su teoría de superficies las propiedades métricas de una superficie inmersa en un espacio euclídeo tridimensional, y demostró que éstas pueden ser descritas mediante conceptos que sólo guardan relación con la propia superficie, y no con la inmersión [en el espacio] ... Riemann extendió la línea de pensamiento gaussiana a continuos de cualquier número de dimensiones, y previó el significado físico de esta generalización de la geometría de Euclides con visión profética. ... las leyes naturales sólo adoptan su forma lógica más satisfactoria cuando son expresadas como leyes del continuo cuatridimensional espacio-temporal.”

Veamos la descripción que Riemann dio de las variedades y, en particular, las variedades de cuatro dimensiones, a que hace referencia Einstein.

“Atribuimos a un objeto variación continua cuando es posible una transición continua de una determinación del mismo a otra. La totalidad de las determinaciones (o también parte de ellas, entre las que sea posible una transición continua) constituyen entonces una variedad extensa continua, y cada una de ellas se llama punto de esa variedad.

[...] El concepto de variedad de múltiples dimensiones subsiste independientemente de nuestras intuiciones espaciales. El espacio, el plano, la línea, son sólo los ejemplos más intuitivos de una variedad de tres, dos o una dimensión. Aún sin tener la menor intuición espacial, podríamos desarrollar toda la geometría. Aunque podríamos deducir analíticamente todas las proposiciones sobre variedades de más de tres dimensiones, sería con mucho preferible el basar la teoría de las variedades de más dimensiones directamente sobre la geometría. Quiero desarrollar esto solamente para las variedades de 4 dimensiones.

[...] Una variedad de 4 dimensiones es aquí, pues, algo que contiene en sí infinitos espacios. Pero nunca podemos contemplar más que lo que está en un mismo espacio. Cuando diga, en lo sucesivo, que dos construcciones no están en el mismo espacio, quiere ello decir que no puedo contemplar ambas a la vez, no puedo hacerme absolutamente ninguna imagen de su lugar recíproco, sólo puedo extraer conclusiones lógicas a partir de las premisas que hago sobre ellas, y es un requisito esencial para la comprensión de lo que sigue, el atenerse sólo a estas conclusiones lógicas.

[...] Queremos ocuparnos de una espacialidad de cuatro dimensiones. Se trata de una espacialidad continua de mayor extensión que todo el espacio infinito. Ciertamente, con nuestra intuición no podemos abarcar más que todo el espacio infinito, pero podemos desplazarnos a través de diversos espacios, uno tras otro. Quiero decir con ello: me imagino primero todo el espacio infinito, después me imagino otra vez todo el espacio infinito, pero pensando que todos los puntos que ahora contemplo son distintos de los puntos que contemplaba antes.” (Bernhard Riemann, *Fragmentos sobre variedades y geometría*, en [11], p. 93-95.)

La imagen mental de la espacialidad de cuatro dimensiones que describe Riemann en el último párrafo, es una analogía de la representación cartográfica del globo terráqueo como dos hemisferios planos circulares. Cada uno de los círculos representa la mitad de la esfera terrestre, y sus circunferencias, el círculo máximo terrestre común a ambos. Si desde cualquier punto del interior de cualquiera de los dos hemisferios nos acercamos a su circunferencia, nos encontraremos automáticamente en el punto correspondiente del segundo hemisferio, y podremos abarcar el interior de ambos con la vista. Imaginemos de nuevo que tenemos delante dos círculos, pero esta vez, sin embargo, cada uno de ellos representa una esfera. La Tierra está colocada en el centro de una de ellas, que tiene en su interior todo lo que nuestra civilización alcanza a ver. A continuación, imaginamos que una civilización lejana, más allá del alcance de nuestra visión, está situada en el centro de la segunda esfera, cuyo interior contiene todo lo que tal civilización alcanza a ver. Hay varias posibilidades teóricas: que las esferas se encuentren muy lejos una de otra con mucho universo entre ellas, que tengan partes en común con galaxias observables para ambas civilizaciones o, según propone Riemann, que compartan su superficie y juntas constituyan todo el universo, como los dos hemisferios del mapa de la Tierra comparten su circunferencia y juntos forman el globo terráqueo. Si desde cualquier punto del interior de cualquiera de las dos esferas nos acercamos a la superficie común, nos encontraremos automáticamente en el correspondiente punto de la segunda esfera, y podremos abarcar el interior de ambas con la vista. En 1997, el físico Mark Petersen llamó la atención de la comunidad científica sobre el hecho de que la primera descripción escrita conocida del universo como dos esferas que comparten su superficie, y de la experiencia de poder abarcar simultáneamente, desde cualquier punto del borde común a ambas, el interior de las dos, la dio el poeta Dante Alighieri en el siglo XIV (*La Divina Comedia. Paraíso*, [1], p. 555 y ss.).

“Tan excelsa y tan viva en esa esfera, / y tan igual, es cada parte, que no entiendo
/ en cuál Beatriz el sitio me escogiera.
[...] La natura del mundo, que está quieta / en su centro, mas todo en torno mueve,
/ comienza aquí desde su propia meta. (Canto XXVII, 100-102, 106-108)
Como del cirio que le está alumbrando / detrás, en el espejo advierte el fuego /
quien no lo ve ni en él iba pensando,
vi un punto que irradiaba una clareza / tan aguda, que al ojo que la enfoca / le
obliga a que se encierre su agudeza (Canto XXVIII, 4-6, 16-18)”

En la última parte de su ensayo, Kepler vuelve a los copos de nieve. Todos los poliedros considerados por los griegos habían sido, como la mayoría de los copos de nieve, convexos.

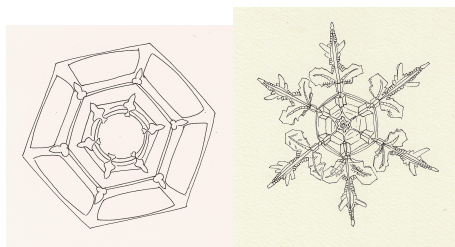


Fig. 11

“Mientras escribo esto, ha empezado a nevar, y mucho más copiosamente que hace un rato. He estado examinando con detenimiento los pequeños copos. Bien, han estado cayendo todos ellos con un patrón radial, pero de dos tipos. Algunos muy pequeños y con una cantidad indefinida de púas insertadas por todas partes, son de formas sencillas sin plumas ni estrías y muy finas, y tienen un glóbulo un poco más grande en el centro. Estos forman la mayoría. Pero salpicados entre ellos aparecen los copos del segundo tipo, las estrellas con seis plumas.”

La existencia de copos de nieve estrellados, llevó a Kepler a investigar la posibilidad de construir poliedros que, como estos copos, fuesen cóncavos. Acabó re-descubriendo dos, el pequeño dodecaedro estrellado (que podemos ver en los mosaicos de Ucello de la Catedral de San Marco, 1425-1430) y el gran dodecaedro estrellado (descrito ya en 1568 por Wenzel Jamnitzer). El descubrimiento de Kepler dio lugar a una nueva pregunta: ¿cuántos poliedros regulares, cóncavos o convexos, hay en total? En 1809 Poincaré encontró dos más, el gran dodecaedro y el gran icosaedro y Cauchy demostró en 1813 que sólo hay nueve: los cinco sólidos platónicos, convexos, y los cuatro, cóncavos, de Kepler y Poincaré.

Como broche de oro, Kepler nos regala, escondida entre sus reflexiones sobre la diferencia entre los patrones hexagonales y pentagonales que encontramos en la naturaleza, la primera descripción escrita, que se conoce, de la relación entre la serie numérica introducida por Fibonacci en *Liber Abaci* (1202) y la proporción divina ([6], p. 67). Denominada por los griegos como media y extrema razón (Euclides, Elementos, Libro VI) y por los lectores de Matila Ghyka (1931) como el número de oro o proporción áurea, su valor numérico es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

“La estructura de cada uno de estos sólidos, como la del pentágono, no puede ser construida sin la proporción que los geómetras modernos denominan “divina.” Está ordenada de tal manera que los dos términos menores en una proporción continua producen el tercero; y, sucesivamente, cualesquiera dos términos adyacentes suman el término siguiente, hasta el infinito, pues la misma proporción se mantiene siempre.

Es imposible dar un ejemplo numérico perfecto. Cuanto más nos alejemos de la unidad, más perfecto será nuestro ejemplo. Sean los términos menores 1 y 1, que debes pensar como distintos. Súmalos, y hacen 2. Añade el mayor 1 para hacer 3. Suma 2 y hacen 5. Suma 3 y hacen 8. Suma 5 y hacen 13. Suma 8 y hacen 21. Como 5 es a 8, así es, aproximadamente, 8 a 13; como 8 es a 13 así es, aproximadamente, 13 a 21. Y así sucesivamente, hasta la eternidad.”

Hay quienes, quizás atraídos por su divina proporción, consideran la serie de Fibonacci como una escalera de oro que nos acerca a la eternidad, y la geometría de los pentágonos y hexágonos el no va más y sustento estructural del universo. Los matemáticos, sin embargo, hacen suyas las palabras finales de Kepler,

“Pero la facultad formativa de la tierra no se restringe a una única figura, sino que practica con maestría toda la geometría.”

y equipados con su caja de herramientas siguen explorando el universo en busca de estructuras nuevas por las que trepar. Como José María Montesinos Amilibia.

References

- [1] Dante Alighieri *Divina Comedia* (1307-1321), traducción de Ángel Crespo, Editorial Planeta 1990.
- [2] Albert Einstein, *Cosmological considerations on the general relativity theory*, pp. 177-188 in “The Principle of Relativity”, a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity, by H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, with notes by A. Sommerfeld; translated by W. Perrett and G. B. Jeffery. Published by Methuen and Co. Ltd., London, 1923; reprinted in 1990; also published unaltered and unabridged by Dover Publications, Inc., in 1952.
- [3] Albert Einstein, *Ideas and opinions* (1954), Crown Publishers 1960.
- [4] Thomas Hales, *A proof of the Kepler conjecture*, Annals of Mathematics 162-3 (2005), pp. 1065-1185.
- [5] Robin Hartshorne, *Euclid and Beyond*, Springer-verlag, 2000.
- [6] Johannes Kepler, *The Six Cornered Snow Flake. A New Year's Gift* (1611), edición bilingüe latín/inglés, Paul Dry Books 1910, ilustraciones y notas matemáticas de Capi Corrales Rodríguez
- [7] Pappus de Alejandría, *La Collection Mathématique* (340), Livre V. Tome Premier, pp. 237-364, A. Blanchard 1982.
- [8] *Pappus on the sagacity of bees*, en “The History of Mathematics. A Reader”, J. Fauvel y J. Gray (eds.), MacMillan 1987, p. 211.
- [9] Pappus de Alejandría, *The Collection. Book V. Preface on the Sagacity of Bees*, en “A History of Greek Mathematics” (1921) Vol. II, S.T. Heath, Dover Publications 1981, p. 389.
- [10] Mark A. Petersen, *Dante and the 3-sphere*, American Journal of Physics **47**, 1031-1035.
- [11] José Ferreirós, *Riemanniana Selecta*, Ediciones del CSIC, Madrid 2000.