Cables, muchos cables, demasiados cables.

Clara I. Grima

Septiembre 2021

1 Introducción

En la actualidad dependemos totalmente de las redes que nos interconectan a unos con otros. Aunque parte de esas redes están basadas en conexiones inalámbricas, la parte fundamental de las comunicaciones sigue dependiendo (y cada día más) de redes físicas. Muchas veces se obvia el problema de la longitud de esas conexiones, pero desde el punto de vista económico y de efectividad, dicha longitud es un parámetro fundamental. Vamos a tratar de modelizar diversas aproximaciones a dicho problema.

2 Planteamiento general

Supongamos que se construye una nueva urbanización y se quiere llevar conexión telefónica a todas las casas de ella. Diversas compañías telefónicas cobran una cuota de conexión proporcional a la longitud de la red más corta que permite unir todas las casas directamente entre sí y al punto de enganche de la red general. Esto es, desde cada casa debe haber un cable que lleva o bien al punto de enganche o a otra casa, pero con la condición de que, desde cada casa, podremos llegar al punto de enganche mediante dicha red (posiblemente pasando por otras casas). Al margen de lo anterior, está claro que si se utiliza menos cable para realizar todas las conexiones, se está ahorrando tanto en material, como, posiblemente, en mano de obra y de trabajo. En todo momento, se entiende que se ha de minimizar la longitud total del cable utilizado (la suma de las longitudes de los distintos tramos) y que la distancia entre los puntos que se indica es la euclídea en el plano.

1. Suponiendo que no hay obstáculos, probar que la conexión óptima entre las casas, así como la de la o las que correspondan con el enganche, será en línea recta y que no hay cruces entre los cables.

3 Modelado y solución del problema

2. Describir qué propiedades tiene la red que cumple los requisitos que se está buscando.

SēMA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

3. Proponer un modelo matemático para dicho problema. ¿Existe algún problema de redes apropiado? En caso afirmativo, indicarlo.

4. Diseñar un método para calcular dicha red.

4 Mejorando la red óptima

Ahora no vamos a imponer la condición de que las uniones entre las casas sean directas de una a otra y así se pueden crear nuevos puntos (que no sean ni casas ni el punto de enganche a la red general) a los que se conecten varias casas.

5. Dar un ejemplo en el que, en este caso, la longitud de la red con esos puntos adicionales sea menor que sin ellos (cuanto mayor sea la diferencia entre ellos, mejor).

6. Si llamamos N a la red sin puntos adicionales y N' con ellos, probar que $\mathbf{2}/\sqrt{\mathbf{3}} \times l(N') \geq l(N)$, donde $l(N)$ y $l(N')$ representan las longitudes de las redes N y N', respectivamente.

En este caso, el problema del cálculo de N' es un problema NP-duro (bonus si alguien da razones para esto). Se trata, por lo tanto, de construir buenas aproximaciones a dicha red. A los puntos adicionales que se han creado se les llama puntos de Steiner.

7. Suponer que solo se añade un punto de Steiner. Si asumimos que dicho punto de Steiner está unido a solo tres puntos originales (casas o punto de enganche), ¿Qué propiedad deben cumplir las aristas (los cables) que parten de dicho punto de Steiner?

8. Diseñar un método que calcule la red de longitud mínima bajo dichas condiciones.

9. Diseñar algoritmos, basados en heurísticas que calculen una aproximación de N' (ya sin las restricción de añadir un único punto). Se valorará la efectividad del método en función el número de casas y de la rapidez de cálculo (número de operaciones), como el grado de aproximación a la red de longitud mínima real.

10. Aplicar el algoritmo del punto anterior si suponemos que hay 10 casas en los puntos $C = \{(0,1),((2,0),(0,3),(2,3),(4,2),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,0)\}$ y que el punto de enganche general está en el origen de coordenadas.