

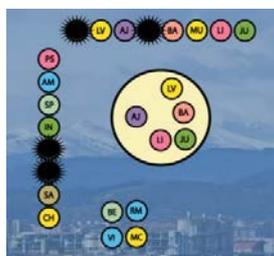


## Problema propuesto en el V Concurso de Modelización Matemática del IMI (CMM-IMI 2022)

### ANÁLISIS CRÍTICO Y PROPUESTAS DE MEJORA DEL SORTEO UEFA PARA LA FASE SEGUNDA DE LA CHAMPIONS

Enrique Castillo Ron (Universidad de Cantabria, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, Real Academia de Ingeniería)

Francisco Javier Girón González-Torre (Universidad de Málaga, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España)



#### 1. INTRODUCCIÓN

El sorteo de Champions de la UEFA en su segunda fase tiene como objetivo seleccionar los emparejamientos de los ocho equipos campeones y los ocho subcampeones de la primera fase, para determinar los partidos que deben jugarse en dicha fase.

Este sorteo está sometido a tres restricciones:

- 1.- Todos los emparejamientos deben incluir un campeón y un subcampeón de grupo.
- 2.- No pueden enfrentarse equipos procedentes del mismo torneo nacional, es decir, de la misma nacionalidad.
- 3.- No pueden enfrentarse equipos que se hayan enfrentado ya en la fase de grupos.



Esto puede verse en la Tabla 1, en la que se muestran las probabilidades de emparejamientos de los diferentes equipos en el sorteo de la UEFA. Los cuadros negros de la diagonal excluyen las parejas que se han enfrentado en la fase anterior, y los cuadros fuera de la diagonal excluyen equipos del mismo país.

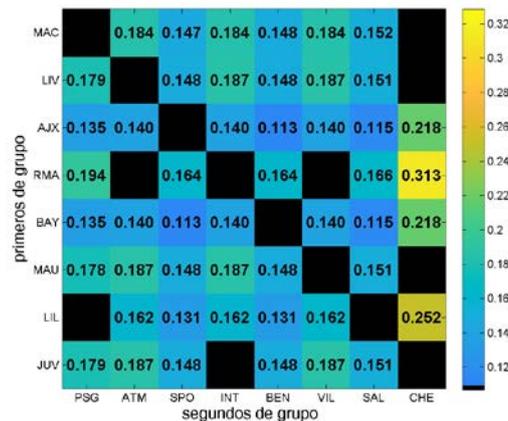


TABLA 1.- Probabilidades de emparejamiento entre los diferentes equipos resultantes del sorteo realizado por la UEFA.

Estas restricciones implican que los números de contrincantes posibles de los equipos no coincidan. Por ejemplo, en el caso del año 2021, el Chelsea y el Real Madrid pueden enfrentarse, respectivamente, a cuatro y cinco equipos solamente, mientras que el resto de equipos admiten seis o siete contrincantes.

En principio, podría pensarse en que el sorteo debería asignar las mismas probabilidades a cada equipo con todos sus posibles contrincantes. Sin embargo, las condiciones anteriores son tan fuertes que ello no es posible.

Para analizar la equidad de un sorteo, podrían utilizarse las tablas que dan las probabilidades de enfrentamientos entre equipos asociadas a cada uno de ellos. Es evidente que las tres reglas fuerzan a probabilidades nulas de aquellos enfrentamientos que las contradicen, pero indirectamente implican otras muchas restricciones a estas tablas.

Insistimos en que las tablas a analizar deben surgir de los resultados posibles de los sorteos, cada uno de los cuales genera ocho enfrentamientos entre dos equipos concretos. En otras palabras, para simular las tablas de las probabilidades de enfrentamientos entre equipos habría que simular primero los sorteos y sacar de ellos los emparejamientos resultantes.

Ante la observación de varias de estas tablas se plantea el problema de comparar las equidades asociadas a cada una de ellas. Puesto que las probabilidades anteriormente mencionadas no pueden ser iguales, surgirán dudas sobre cuál o cuáles de ellas nos parecen admisibles y cuáles son inadmisibles.



Por ello, resulta necesario precisar lo que se entiende por equidad. Para ello, requeriremos una fórmula o algoritmo a aplicar para decidir si una tabla es o no, mejor que otra, surgiendo el problema de proponer y evaluar diferentes alternativas.

Además, una vez propuestas las alternativas en forma matemática, podremos obtener las tablas óptimas, en función de estos criterios matemáticos, siendo necesario analizar los resultados para comprobar que dichos criterios responden a lo que teníamos en mente al seleccionarlos. Por ejemplos, la Tabla 2 muestra la solución óptima en el sentido de minimizar las diferencias de probabilidades de emparejamientos considerando todos los equipos. Puede verse que esta tabla da una solución más equitativa que la de la Tabla 1.

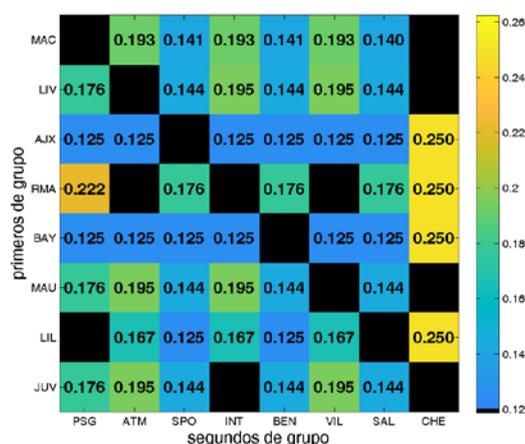


TABLA 2.- Probabilidades de emparejamiento entre los diferentes equipos resultantes de minimizar el rango de las probabilidades que pueden aparecer en la tabla usando las restricciones impuestas por la UEFA.

También tendrá mucho interés conocer si las soluciones óptimas según esos criterios son o no, únicas, en cuyo caso podrían considerarse otros criterios adicionales para el desempate.

## 2. MATERIAL PARA INTRODUCIR AL TEMA A LOS CONCURSANTES

Para facilitar el entendimiento de cómo funciona el sorteo UEFA, se recomienda ver el vídeo <https://youtu.be/BvqCdYOJqA> en el que se demuestra que el primer sorteo realizado, en el que se cometieron algunos errores, no debió repetirse, pues las medidas tomadas anularon los efectos de los errores, conservando las probabilidades iniciales. El vídeo también ilustra cómo el método de sorteo ideado por la UEFA podría bloquearse si no existiese un programa de ordenador que ayude a evitar que los últimos equipos a los que haya que asignar contrincante se queden sin posibilidad de asignación por contravenir las reglas.

También se aporta un par de trabajos en el que se ilustran todas estas cosas y se aportan algunas soluciones.



<https://meteo.unican.es/temp/castie/informe7.pdf>

<https://theconversation.com/la-repeticion-que-no-debio-tener-lugar-como-hacer-el-sorteo-de-la-champions-mas-equitativo-179068>

### **3. LABOR A REALIZAR POR LOS CANDIDATOS**

El concurso consiste en elegir la mejor propuesta que permita mejorar la equidad y la realización del sorteo.

Para ello los concursantes deben:

- 1.- Proponer criterios de equidad en forma matemática, es decir, aportando fórmulas que permitan evaluar las tablas de probabilidad de los posibles enfrentamientos asociados a cada sorteo.
- 2.- Justificar, a priori, esos criterios matemáticos mediante su significado para la gente de la calle que no conoce las matemáticas, es decir, lo que la gente puede tener en mente sobre lo que es la equidad.
- 3.- Obtener las tablas correspondientes de emparejamientos para los casos óptimos que correspondan a los criterios elegidos.
- 4.- Discutir la unicidad de las soluciones.
- 5.- Analizar las tablas óptimas, a posteriori, y concluir, justificadamente, si se consideran o no, convenientes a la luz de los resultados obtenidos.
- 6.- Diseñar un procedimiento o algoritmo de sorteo que corresponda a las tablas elegidas indicando si, como en el sorteo de la UEFA, es necesario el apoyo de un programa que asegure la ausencia de bloqueo.
- 7.- Demostrar la eficiencia del mismo aplicándolo al caso del sorteo celebrado este año y a otro que puedan considerar relevante.

### **4. FORMA DE SELECCIONAR A LOS CANDIDATOS POR PARTE DE LOS COMITÉS**

Los tribunales encargados de seleccionar los mejores trabajos tendrán en cuenta:

- 1.- La calidad y originalidad de las soluciones. Si se utilizaran resultados existentes en la literatura, deberán ser citados correctamente
- 2.- La variedad y riqueza de las mismas en el caso de que se propongan varias.



- 3.- Su interpretabilidad y comprensión por parte de personas que no sean especialistas en matemáticas en general y en probabilidad en particular.
- 4.- La sencillez de los métodos de sorteo propuestos.
- 5.- La espectacularidad de los sorteos con respecto al público asistente a los mismos.
- 6.- Cualquier otro aspecto que demuestre la originalidad y eficiencia de las propuestas.