

Problema propuesto en el VII Concurso de Modelización Matemática del IMI



(CMM-IMI 2024)

Descubre el Secreto del Sol: Diseña tu Propia Célula Solar

Problema propuesto por:
Pablo Ferrada y Benjamin Ivorra

Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI)
Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid



Plataforma Solar del Desierto de Atacama, Universidad de Antofagasta (Chile)

1. Introducción

La tecnología fotovoltaica y las placas solares han despertado un gran interés global debido a su capacidad para convertir la luz solar en electricidad de manera eficiente y sostenible. A nivel mundial, estas tecnologías están siendo adoptadas con entusiasmo por varias razones.

En Europa, la transición hacia fuentes de energía más limpias ha llevado a una expansión masiva de la energía solar fotovoltaica. Países como Alemania y España están liderando el camino con grandes proyectos solares que están cambiando la matriz energética y apoyando la meta de neutralidad climática. En la Unión Europea, la energía solar fotovoltaica representa alrededor del 10% de la capacidad total de generación de electricidad, con una capacidad instalada que supera los 150 gigavatios (GW).

En América Latina, países como Chile y México están aprovechando su abundante recurso solar para generar electricidad limpia y económica. Proyectos solares a gran escala están ayudando a mejorar el acceso a la energía y reducir la dependencia de combustibles fósiles en la región. En México, la capacidad solar fotovoltaica instalada es de aproximadamente el 2% del total de la capacidad de generación eléctrica.

El corazón de la tecnología fotovoltaica son las células solares. Estas pequeñas unidades, cuando se juntan en gran número, forman lo que conocemos como un panel solar. Un panel solar es capaz de convertir la luz del sol en electricidad de forma directa.

Para entender cómo funciona, imagina que las células solares están hechas de un material especial llamado semiconductor. Este material tiene una propiedad única: cuando la luz del sol, compuesta por diminutas partículas llamadas fotones, golpea el semiconductor, se libera energía dentro de la célula.

Esta energía liberada crea un par de partículas cargadas: un electrón (con carga negativa) y un hueco (con carga positiva). Al moverse, estas partículas generan una corriente eléctrica. Piensa en ello como si fueran pequeños ríos de carga eléctrica que fluyen dentro de la célula. La corriente total que produce una célula es la combinación de la corriente generada por los electrones y por los huecos.

Para diseñar y mejorar las células solares, los científicos usan un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen cómo se comportan estas partículas y cómo fluye la corriente. Estas ecuaciones pueden ser muy complejas y pueden representarse en una, dos o tres dimensiones, dependiendo de cuántos detalles se quieran analizar.

En algunos casos, los científicos están usando una versión simplificada de estas ecuaciones en una dimensión (1D). Esto significa que están mirando cómo funcionan las cosas a lo largo

de una sola línea recta dentro de la célula. Esta simplificación permite resolver las ecuaciones a mano, sin necesidad de usar ordenadores ni métodos numéricos complicados.

Las soluciones de estas ecuaciones dan lugar a un valor de su densidad de corriente efectiva que nos dice cuánta potencia y eficiencia puede obtenerse de una célula o panel solar. Con esta información, los investigadores pueden mejorar el diseño y optimizar el rendimiento de los dispositivos solares.

En este concurso se pretende desarrollar un modelo simplificado en una dimensión y utilizarlo para diseñar una célula solar con un rendimiento mejorado.

No te asustes al leer la siguiente sección (que contiene muchos detalles) y pienses que no lo puedes hacer: Como verás más adelante, sólo necesitas saber un poco de ecuaciones diferenciales, un poco de optimización, un poco de programación y abrir tu mente a algunos conceptos sencillos de Física de Semiconductores.

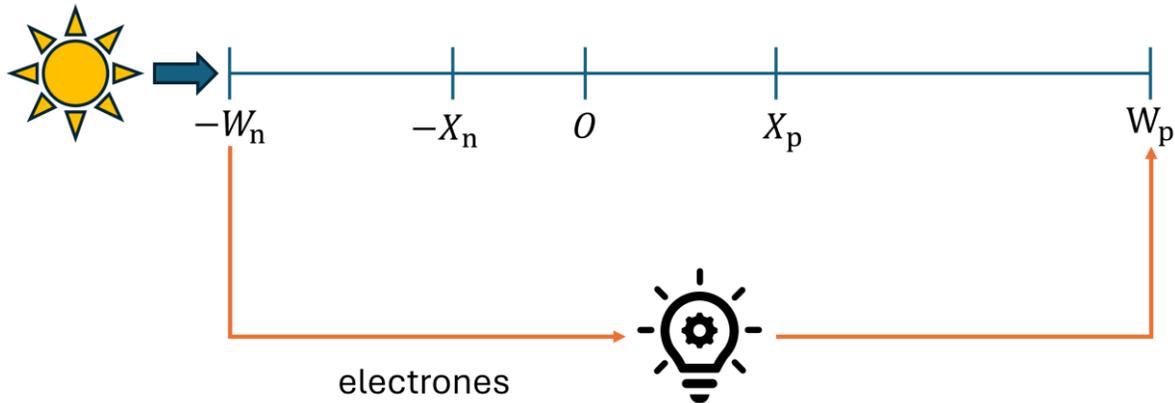
¿Aceptas este reto?



2. Modelo matemático

Primero, exploramos las fórmulas fundamentales que describen el comportamiento de los electrones y huecos en semiconductores, clave para entender dispositivos como las células solares.

Consideramos un modelo en una dimensión, cuya representación esquemática sería la siguiente:



Imaginemos un segmento que atraviesa todo el dispositivo, desde el contacto metálico superior, que recibe la luz solar (a la izquierda en $x = -W_n$), hasta el contacto metálico inferior (a la derecha en $x = W_p$), el cual permite transferir la corriente eléctrica generada en la célula solar a un circuito externo para su uso. Entre ambos extremos del segmento, se encuentran dos capas de material semiconductor dopadas (con transición en $x = 0$), que son cruciales para la conversión de la luz solar en electricidad.

Dopada significa que estas capas de semiconductor han sido tratadas con pequeñas cantidades de otros elementos (dopantes) para alterar sus propiedades eléctricas. Hay dos tipos de dopaje:

- **Tipo n:** Se añaden átomos que tienen más electrones disponibles, creando un exceso de electrones.
- **Tipo p:** Se añaden átomos que tienen menos electrones disponibles, creando huecos donde los electrones pueden moverse.

Estas capas forman el emisor, la base y la zona de agotamiento, trabajando juntas para capturar la energía del sol y convertirla en electricidad.

- **El emisor** (de $x = -W_n$ hasta $x = 0$) tiene la función de recolectar los electrones generados y transportarlos hacia los contactos eléctricos externos de la célula. Esta capa está compuesta de semiconductor y está dopada de tipo n. Al doparlo de tipo

n, se introducen átomos que aportan electrones adicionales al material. Estos electrones extra aumentan la conductividad eléctrica del semiconductor, facilitando el flujo de corriente. De esta manera, el emisor puede recolectar y transportar eficientemente los electrones generados por la luz solar hacia el circuito externo, permitiendo que la célula solar produzca electricidad de manera efectiva.

- **La base** (de $x = 0$ hasta $x = W_p$) tiene como función facilitar la separación y el movimiento de los huecos generados por la luz solar hacia los contactos eléctricos. Esta capa está compuesta de semiconductor y está dopado de tipo p. Al estar dopada con átomos que crean huecos (falta de electrones), la base actúa como la contraparte del emisor, ayudando en la creación de un campo eléctrico en la zona de agotamiento.
- **La zona de agotamiento** (de $x = -X_n$ hasta $x = X_p$), también conocida como la unión p-n, es donde se produce la conversión principal de la energía solar en electricidad. Esta región se forma en la unión entre la base y el emisor, permitiendo que la luz solar genere electrones y huecos que se separan debido a un campo eléctrico. Es importante resaltar que la posición de la zona de agotamiento, es decir, los valores X_n y X_p , viene relacionado por algunos de los parámetros de diseño de la célula solar. Detallaremos esta relación más adelante (ver sección 2.3).

En resumen, el emisor recoge los electrones generados por la luz solar, la base facilita el movimiento de los huecos y la zona de agotamiento es donde se genera la electricidad a partir de la energía solar. Estos componentes trabajan juntos para convertir eficazmente la luz solar en electricidad utilizable.

Considerando esta configuración geométrica, vamos a presentar cómo modelizar distintos aspectos de la célula solar: su densidad de corriente efectiva, la energía eléctrica generada, el movimiento de los electrones y de los huecos y los fenómenos de transición que ocurren entre las diferentes capas del dispositivo.

2.1 Densidad de corriente neta

De forma general, la densidad de corriente en una célula solar es una medida de cuánta corriente eléctrica se genera por cada unidad de área de la superficie de la célula. Se puede medir en Amperio por centímetros cuadrados (es decir $\left[\frac{A}{cm^2}\right]$). Imagina que tienes dos células solares de diferente tamaño, pero hechas de distintos materiales. Si ambas generan la misma cantidad de corriente total, la más pequeña tiene una densidad de corriente mayor porque produce esa corriente en un área más reducida. Esto es importante porque la densidad de corriente nos permite comparar la eficiencia de diferentes células solares independientemente de su tamaño.

A nivel de diseño, nos interesa estudiar la llamada densidad de corriente neta, denotada por J , en la célula solar. Se define como la diferencia entre la densidad de corriente cuando la célula está iluminada y la densidad de corriente de oscuridad en una célula solar.

Representa la corriente eléctrica efectiva que la célula solar puede suministrar al circuito externo bajo iluminación. Considera tanto la generación de corriente debido a la absorción de luz solar como las pérdidas internas inherentes al dispositivo, permitiendo evaluar el rendimiento real de la célula solar en la producción de electricidad.

Se puede estimar mediante la siguiente fórmula:

$$J = J_L - J_D.$$

En esta fórmula, J_L representa el valor máximo teórico de corriente que puede generar la célula cuando está iluminada. En general, este valor viene dado en función del material usado en la célula solar.

Por otro lado, J_D es la densidad de corriente que se produce cuando la célula solar está en oscuridad, es decir, cuando no hay luz solar. Depende del diseño de la célula y de varios parámetros técnicos. Esta corriente se resta porque se opone a la corriente J_L y representa las pérdidas, reduciendo la cantidad de electricidad disponible. J_D viene dada por

$$J_D = J_p(-X_n) + J_n(X_p),$$

donde:

- J_n es la densidad de corriente de electrones, es decir la corriente por unidad de área debida específicamente al movimiento de electrones (portadores de carga negativa) dentro del semiconductor.
- J_p es la densidad de corriente de huecos, es decir la corriente por unidad de área asociada al movimiento de huecos (portadores de carga positiva) dentro del semiconductor.

Ambos valores se pueden determinar resolviendo un conjunto de ecuaciones que detallaremos a continuación.

2.2 Deriva-difusión y continuidad

Las ecuaciones principales, llamadas ecuaciones de deriva-difusión y continuidad, describen el movimiento y la continuidad de los electrones y huecos dentro del material semiconductor.

La deriva y la difusión son dos mecanismos fundamentales que explican cómo se mueven los electrones y huecos en un material semiconductor, como los que se usan en las células solares. La deriva es el movimiento de electrones y huecos en un material semiconductor impulsado por un campo eléctrico. La difusión es el movimiento de electrones y huecos

desde regiones de alta concentración a regiones de baja concentración debido a las diferencias en concentración.

Las ecuaciones de continuidad para electrones y huecos en un semiconductor describen cómo cambian las concentraciones de estos portadores de carga en el tiempo y el espacio. Estas ecuaciones aseguran la conservación de la carga, teniendo en cuenta la generación, recombinación, y movimiento de electrones y huecos.

Asumiendo que el campo eléctrico presente en el material es despreciable (por ejemplo, considerando juntas de alto dopaje), estas ecuaciones vienen dadas en forma estacionaria, cuando $x \in [-W_n, W_p]$, por:

$$J_n(x) = qD_n \frac{dn}{dx}(x) \quad (\text{Deriva-difusión para electrones})$$

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_n}{dx}(x) - \left(\frac{\Delta n}{\tau_n}(x) - G \right) = 0 \quad (\text{Continuidad para electrones})$$

$$J_p(x) = -qD_p \frac{dp}{dx}(x) \quad (\text{Deriva-difusión para huecos})$$

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_p}{dx}(x) + \left(\frac{\Delta p}{\tau_p}(x) - G \right) = 0 \quad (\text{Continuidad para huecos})$$

En este contexto:

- n y p son las concentraciones de electrones y huecos. Esto nos indica cuántos electrones y huecos hay en el material.
- q es la carga del electrón, es una propiedad fundamental de los electrones y representa la cantidad de carga eléctrica que posee un solo electrón.
- D_n y D_p son los coeficientes de difusión para electrones y huecos. La difusión es el proceso por el cual las partículas se esparcen desde áreas de alta concentración a áreas de baja concentración.
- τ_n y τ_p representa el tiempo que transcurre entre que se absorbe un fotón, se genera un electrón libre o un hueco, respectivamente, y se recombina.
- Δn y Δp representan las concentraciones adicionales de electrones y huecos cuando el dispositivo está iluminado. En términos simples, esto significa que hay más electrones y huecos que en condiciones normales (sin luz). Vienen dados por

$$\Delta n(x) = n(x) - n_0 \text{ y } \Delta p(x) = p(x) - p_0.$$

donde n_0 y p_0 son las concentraciones de electrones y huecos en equilibrio, es decir, las cantidades normales cuando no hay luz.

- G es la tasa de generación de pares electrón-hueco. Esto ocurre cuando la luz del sol ilumina el material, creando nuevos pares de electrones y huecos.

Estas ecuaciones describen cómo se generan, se mueven, se esparcen y se recombinan los electrones y huecos dentro de una célula solar.

Para resolver estas ecuaciones necesitamos condiciones de contorno. En este caso, se asume que las concentraciones adicionales de electrones y huecos en los extremos de la célula solar es cero, es decir

$$\Delta n(-W_n) = 0 \text{ y } \Delta p(W_p) = 0.$$

Adicionalmente, vamos a necesitar condiciones adicionales sobre las soluciones proporcionadas por la llamada 'ley de juntura' explicada a continuación.

2.3 Ley de la juntura

La ley de la juntura explica cómo se relacionan los portadores de carga extra (electrones y huecos) con el potencial eléctrico en una juntura p-n (es decir en la frontera de la zona de agotamiento, en nuestro caso $x = -X_n$ y $x = X_p$). Las ecuaciones que describen estas relaciones son:

$$\Delta n(X_p) = \frac{n_{\text{int}}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

$$\Delta p(-X_n) = \frac{n_{\text{int}}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Además, a nivel práctico, los valores extremos de la juntura p-n, X_n y X_p , vienen dados por

$$X_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_{\text{int}}}{q} \left(\frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \right)} \quad \text{y} \quad X_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_{\text{int}}}{q} \left(\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)} \right)}.$$

En estas ecuaciones consideramos:

- V es el potencial eléctrico aplicado en el material semiconductor. Asumiremos que V es una constante, ya que va a depender de un voltaje externo aplicado al dispositivo en condiciones experimentales de laboratorio.
- n_{int} es la concentración intrínseca de portadores de carga, es decir, la concentración de electrones o huecos cuando no hay dopaje (en cuyo caso se está en situación de equilibrio con $n = p = n_{\text{int}}$). Es una constante a una temperatura dada.
- N_A y N_D son las concentraciones de átomos, llamados aceptores y donadores. En efecto, en una célula solar, para que el material pueda generar electricidad, se le añaden estos átomos especiales. N_A corresponde al nivel de dopaje en la región tipo-p del semiconductor mientras N_D corresponde al nivel de dopaje en la región tipo-n del semiconductor. Ayudan a que el material funcione mejor cuando le da la luz. Mas específicamente:

- **Donadores:** Son átomos que tienen un extra de electrones, es decir, más electrones que el material original. Estos electrones son importantes porque ayudan a conducir la electricidad. Los donadores crean la región n, que es la parte que tiene electrones adicionales.
 - **Aceptores:** Son átomos que tienen menos electrones que el material original, creando pequeños "huecos" donde faltarían electrones. Estos huecos también ayudan al flujo de electricidad. Los aceptores forman la región p, que es donde faltan electrones.
- k es la constante de Boltzmann, que relaciona la temperatura con la energía.
 - T es la temperatura.
 - ϵ es la permitividad eléctrica del silicio
 - $V_{\text{int}} = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_{\text{int}}^2} \right)$ es el potencial interno de la célula solar que se crea debido a la difusión de electrones y huecos a través de la juntura p-n.

Estas condiciones ayudan a describir cómo se distribuyen los portadores de carga extra en un semiconductor cuando se ilumina. La iluminación genera pares electrón-hueco, los cuales se separan hacia lados opuestos debido a que existe un campo eléctrico en la juntura p-n. Así se establece una corriente eléctrica. Esto se traduce en que, a mayor valor de $\Delta n(X_p)$ y $\Delta p(-X_n)$, mayor valor de J_D y entonces menor valor de la densidad de corriente efectiva J . En la practica buscamos un diseño de una célula solar son un valor de J_D lo más pequeño posible.

3. Problema propuesto

Proponemos utilizar las ecuaciones anteriores para desarrollar un modelo matemático simplificado en una dimensión, que explique el comportamiento de una célula solar bajo un espectro solar. Posteriormente, utilizando este modelo, pretendemos proponer y resolver un problema de diseño óptimo de estas células solares, basado en parámetros específicos, con el objetivo de mejorar su rendimiento.

Para ello se pide llevar a cabo:

1. Desarrollar un modelo matemático simplificado para describir las concentraciones de electrones y huecos dentro de la célula solar. Para ello:
 - a. Acoplar las ecuaciones de deriva-difusión con la de continuidad para encontrar una única ecuación diferencial para la concentración de electrones (es decir, n) y otra para la concentración de huecos (es decir, p).
 - b. Simplificar las ecuaciones del punto 1).a., considerando una condición de oscuridad, es decir $G = 0$.
2. Queremos obtener una estimación de J . Para ello:
 - a. Obtener J_D resolviendo las ecuaciones del punto 1).b., usando las condiciones de contorno y la ley de la juntura.
 - b. Considerando los valores dados en la Tabla 1, calcular el valor de J .
 - c. Considerando los valores dados en la Tabla 1 (salvo V), dibujar la gráfica de J en función de V (a esta curva se le llama curva característica de la célula solar) para un rango de voltaje entre 0 a 0.52 V.
 - d. Consideramos la potencia de la célula solar $P(V) = J(V) V$, cuya unidad es $\left[\frac{W}{cm^2}\right]$. Dibujar la gráfica de $P(V)$ en función de V para un rango de voltaje entre 0 y 0.52 V.
3. Resaltamos que V , W_n , W_p , N_D y N_A pueden ser utilizados como variables para optimizar (en este caso maximizar) la potencia de la célula solar $P(V) = J(V) V$. Para ello:
 - a. Formular el problema de optimización matemática para maximizar la potencia de la célula solar, teniendo en cuenta los parámetros V , W_n , W_p , N_D y N_A , y los rangos de valores establecidos para estos en la Tabla 2.

- b. Considerando los valores y rangos de valores dados en las Tablas 1 y 2. Resolver numéricamente el problema planteado en 3).a. con un método de optimización adecuado. Reportar los valores de los parámetros optimizados (es decir V , W_n , W_p , N_D y N_A). Dar el valor de la potencia máxima en el caso no optimizado (es decir considerando los valores de la Tabla 1) y optimizado.
- c. Considerando los valores de la Tabla 1, salvo los valores de W_n , W_p , N_D y N_A para los que se usarán los valores óptimos de parámetros obtenidos en 3).b., dibujar las gráficas de la curva característica y de la potencia de la célula solar para un rango de voltaje entre 0 y 0.52 V.

4. Parámetros considerados

Tabla 1: Parámetros del modelo inicial.

Parámetro	Valor	Unidad	Descripción
V	0.45	[V]	Voltaje
W_n	0.2×10^{-4}	[cm]	Ancho de la zona n (emisor)
N_D	10^{20}	[cm^{-3}]	Concentración de donadores
D_p	11.6	[cm^2/s]	Coefficiente de difusión de huecos a 300 K
τ_p	3710×10^{-6}	[s]	Tiempo de vida de huecos
W_p	179.8×10^{-4}	[cm]	Ancho de la zona p (base)
N_A	4.7×10^{15}	[cm^{-3}]	Concentración de aceptores
D_n	2	[cm^2/s]	Coefficiente de difusión de electrones 300 K
τ_n	371×10^{-6}	[s]	Tiempo de vida de electrones
J_L	50×10^{-3}	$\left[\frac{\text{A}}{\text{cm}^2}\right]$	Densidad de Corriente Generada por la Luz Solar
n_{int}	9.696×10^9	[cm^{-3}]	Concentración Intrínseca de Portadores en Silicio a 300 K
q	$1.602176634 \times 10^{-19}$	[C]	Carga elemental
k	$1.3880649 \times 10^{-23}$	$\left[\frac{\text{J}}{\text{K}}\right]$	Constante de Boltzmann
T	300	[K]	Temperatura
ϵ	1.035918×10^{-10}	$\left[\frac{\text{F}}{\text{cm}}\right]$	Permitividad eléctrica del silicio

Tabla 2: Parámetros de optimización y sus rangos.

Parámetro	Rango	Unidad	Descripción
W_n	$[0.05 \times 10^{-4}, 0.75 \times 10^{-4}]$	[cm]	Ancho de la zona n (emisor)
N_D	$[10^{18}, 5 \times 10^{20}]$	[cm^{-3}]	Concentración de donadores
W_p	$[100 \times 10^{-4}, 200 \times 10^{-4}]$	[cm]	Ancho de la zona p (base)
N_A	$[10^{14}, 10^{16}]$	[cm^{-3}]	Concentración de aceptores
V	[0.1, 0.52]	[V]	Voltaje