

# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

## Grupos.

1.- Muestra que los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo:

- (a)  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$  con el producto.
- (b)  $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$  con el producto.
- (c)  $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}$  con el producto, para  $n \in \mathbb{N}$  fijo.
- (d)  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  con el producto.
- (e)  $GL(2, \mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \not\equiv_3 0 \right\}$ .
- (f)  $O(2, \mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \not\equiv_3 0, A^t = A^{-1} \right\}$ .
- (g)  $\mathbb{Z}_m^* = \{[n] \in \mathbb{Z}_m : \exists [n]^{-1}\}$  con el producto.

2.- Indica por qué no son grupos los siguientes conjuntos:

- (a)  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$  con el producto.
- (b)  $G = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ es un cuadrado perfecto}\}$  con la suma.
- (c)  $G = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ es un cuadrado perfecto}\}$  con el producto.
- (d)  $G = \{[0], [2], [3], [6]\} \subset \mathbb{Z}_8$ .

3.- Sea  $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ . Se define el producto  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$  para todo  $x, y \in G$ . Prueba que  $(G, *)$  es un grupo.

4.- Halla una operación sobre  $G = \mathbb{R}$ , de modo que el inverso de  $x \in G$  sea  $1 - x$ .

5.- Un subconjunto no vacío  $H$  de un grupo  $(G, *)$  es un subgrupo si se verifica que

$$a, b \in H \Rightarrow a * b \in H \text{ y además } a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

Prueba que  $H$  es un subgrupo si y sólo si  $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$ .

6.- Prueba que si  $H$  es un subconjunto **finito** de un grupo  $(G, *)$  tal que  $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$  entonces  $H$  es un subgrupo.

7.- Indica los elementos del grupo lineal

$$GL(2, \mathbb{Z}_2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2, ad - bc \not\equiv_2 0 \right\}$$

y calcula la tabla del grupo. Indica los órdenes de sus elementos y si el grupo es cíclico o abeliano.

8.- Indica los ocho elementos del grupo ortogonal  $O(2, \mathbb{Z}_3)$  y calcula la tabla de este grupo. Indica también los órdenes de sus elementos y si el grupo es cíclico o abeliano.

9.- Calcula el orden de los elementos de  $\mathbb{Z}_n^*$  para  $n = 6, 7, 8, 9, 10, 12$ . Indica generadores para cada uno de estos grupos.

10.- Encuentra explícitamente un isomorfismo de grupos  $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{11} \rightarrow \mathbb{Z}_{132}$ .

11.- Sean  $G$  un grupo y  $a, b \in G$ . Prueba que:

- (a) Si  $\text{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$  y  $n = pq$ , entonces  $\text{ord}(a^p) = q$ .
- (b)  $\text{ord}(a^{-1}) = \text{ord}(a)$  y  $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$ .
- (c) Si  $a$  y  $b$  conmutan y tienen órdenes finitos y primos entre sí, entonces  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ .

12.- Considera las siguientes matrices complejas

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Prueba que el conjunto  $G = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  es un grupo con la multiplicación de matrices (se le llama *grupo de cuaterniones*). Da la tabla de multiplicación de  $G$  e indica el orden de  $G$  y el orden de cada uno de sus elementos. Estudia si  $G$  es isomorfo al grupo diédrico  $D_4$  o al grupo  $S_4$  de permutaciones de cuatro elementos.

13.- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  la aplicación definida por  $f(t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$ . Consideramos  $\mathbb{R}$  como grupo con la suma y  $\mathbb{C}^*$  como grupo con la multiplicación.

- (a) Prueba que  $f$  es un homomorfismo de grupos.
- (b) Halla el núcleo y la imagen de  $f$ .
- (c) Deduce que el grupo cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es isomorfo al grupo  $S^1$  del ejercicio 1(d).

14.- Demuestra que el orden de un grupo finito  $G$  es un número primo si y sólo si  $G$  no tiene subgrupos propios (es decir, sus únicos subgrupos son  $\{e\}$  y  $G$ ).

15.- Sea  $G$  un grupo con orden  $|G|$  primo. Prueba que  $G$  es cíclico.

16.- Utiliza el teorema de Lagrange para demostrar el Pequeño teorema de Fermat y el Teorema de Euler.

17.- Prueba las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $p$  y  $n > 0$  son primos entre sí, existe un  $m \geq 1$  de modo que  $n$  divide a  $p^m - 1$ .
- b) Si  $n$  y  $p$  son primos distintos, entonces  $n$  divide a  $p^{n-1} - 1$ .

18.- Se dice que un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  es **normal** si  $gH = Hg \forall g \in G$ .

- (a) Prueba que si  $[G : H] = 2$ , entonces  $H$  es un subgrupo normal de  $G$
- (b) Prueba que  $SL(2, \mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A = 1\}$  es un subgrupo normal de  $GL(2, \mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A \neq_p 0\}$  cuando  $p$  es un número primo. Prueba que el cociente  $GL(2, \mathbb{Z}_p)/SL(2, \mathbb{Z}_p)$  tiene estructura de grupo y es isomorfo a  $\mathbb{Z}_p^*$ .

19.- Sean  $G_1 = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{60}$  y  $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$ .

- (a) Demuestra que  $G_1$  y  $G_2$  no son isomorfos.
- (b) Estudia si existen homomorfismos (de grupos aditivos) suprayectivos de  $G_1$  o  $G_2$  sobre  $\mathbb{Z}_{120}$
- (c) Obten cuatro grupos abelianos de orden 1440 no isomorfos entre sí y que tampoco sean isomorfos ni a  $G_1$  ni a  $G_2$