AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Anillos y cuerpos. Polinomios y cuerpos finitos II

1.- a) Prueba que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ y que $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.
b) Comprueba que en $\mathbb{Z}_3$ no existe un elemento α de modo que $\alpha^2 = 2$. Define $\mathbb{Z}_3[\alpha]$, con $\alpha^2 = 2$, de forma análoga a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Prueba que $\mathbb{Z}_3[\alpha]$ es un cuerpo. ¿Cuál es el cardinal de $\mathbb{Z}_3[\alpha]$?
c) Sea $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomio irreducible ¿por qué? ¿Es el polinomio $x^2 - 2$ irreducible en $\mathbb{Z}_3[\alpha][x]$?

2.- a) Encuentra todos los polinomios mónicos irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$, y de grado 2 en $\mathbb{Z}_5[x]$.
b) Descompón en producto de polinomios irreducibles el polinomio $x^4 + 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

3.- Descompón en factores irreducibles los polinomios $f = x^6 - 1$ y $g = x^6 + 1$ vistos en los anillos $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

4.- Factoriza $f = 4x^2 - 4x + 8$ como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

5.- Descompon en factores irreducibles el polinomio $f = x^4 + 1$ visto, sucesivamente, en los anillos $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_7[x]$.

6.- Sea $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}_[x]$ un polinomio de grado n con $a_0 \neq 0$. Muestra que si p, q son dos enteros primos entre sí, entonces $f(p/q) = 0$ implica que $p|a_0$ y $q|a_n$. Empleando este resultado, factoriza $f = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 4$ en $\mathbb{Q}[x]$.

7.- Estudia la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios:
a) $f_1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ b) $f_2 = 5x^{10} + 10x^7 + 20x^3 + 10$ c) $f_3 = x^3 + 5x^2 + 3x + 35$
d) $f_4 = -x^7 + 25x^2 - 15x + 10$ e) $f_5 = 7x^3 + 6x^2 + 4x + 6$ f) $f_6 = 9x^4 + 4x^3 - 3x + 7$.

8.- Muestra que el conjunto $I := \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \in 3\mathbb{Z}\}$ es un ideal.

(a) Halla dos elementos en $\mathbb{Z}[x]$ que generen I. ¿Es I un ideal principal?

(b) Consideramos la aplicación $\psi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_3$ dada por $f(x) \mapsto f(0)$ mód 3. Prueba que ψ es un homomorfismo de anillos unitarios. Halla el núcleo y la imagen de ψ. Demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/I$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

9.- Sea f un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

(a) Para $a \in \mathbb{C}$ considera el **homomorfismo evaluación** $ev_a : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$ definido por $h(x) \mapsto h(a)$. Prueba que si $f(a) = 0$, entonces el núcleo de ev_a es el ideal principal generado por f.

(b) Deduce que si además $g \in \mathbb{Q}[x]$ y $g(a) = 0$ entonces f divide a g en $\mathbb{Q}[x]$.

10.- Consideremos el homomorfismo evaluación $ev_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ definido por $ev_i(P(x)) = P(i)$. Calcula la imagen de ev_i. Prueba que el núcleo, $\ker(ev_i)$, es el ideal generado por el polinomio $H(x) = x^2 + 1$. Deduce que $\mathbb{R}[x]/(H(x))$ es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

11.- Descompón en factores irreducibles el polinomio $f = 4x^2 - 12$ considerado, sucesivamente, como elemento de $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$. ¿Es $\mathbb{Q}[x]/(f)$ cuerpo? ¿Y $\mathbb{R}[x]/(f)$? En caso afirmativo indica su característica y su dimensión como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.

12.- ¿Es $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 5x + 6)$ un cuerpo? ¿Y $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 6x + 6)$? En los casos afirmativos indica su característica y su dimensión como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

13.- Estudia el anillo cociente $\mathbb{Z}_2[x]/(f)$, indicando el número de elementos y construyendo la tabla de adición y de multiplicación en los siguientes casos:
i) $f = x^2 + 1$ ii) $f = x^2 + 2$ iii) $f = x^2 + x + 1$ iv) $f = x^3 + x + 1$ v) $f = x^3 + x^2 + 1$.

¿Alguno de estos anillos es un cuerpo? Indica en ese caso su característica. ¿Cuál es la dimensión de estos anillos como espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$?

14.- Construye cuerpos con 4, 8, 9 y 25 elementos, indicando su característica.

15.- Halla un divisor de cero en el anillo cociente $A := \mathbb{Q}[x]/(x^3 - x^2 + x - 1)$. ¿Es $\alpha = [x]$ (la clase de x en A) una unidad en este anillo? En caso afirmativo encuentra su inverso.

16.- Consideramos $\alpha = [x]$ como elemento de $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x - 1)$. Calcula, si existe, el inverso de $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$.

17.- Sea $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}[x]$ y se considera el cociente $L = \mathbb{F}[x]/(f)$.

(a) Estudia si L es un cuerpo para los casos $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$.

(b) Denotamos $\alpha = [x] \in L$. En cada caso, estudia si $\alpha - 1$ tiene o no inverso en L, calculándolo si existe.

18.- Consideramos un número primo $n \geq 2$ y el anillo cociente $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^2 - x)$. Muestra que la aplicación $f : A \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ dada por $f(a + b[x]) = (a + b, a)$ es un isomorfismo de anillos.

19.- Estudia si hay isomorfismos entre los siguientes anillos:
i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ii) $\mathbb{Z}_4$ iii) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ iv) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ v) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ vi) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ justificando la respuesta en cada caso.

20.- Halla el único polinomio $f(x)$ de grado menor o igual que 3 y coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ tal que $f(1) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$ y $f(6) = 0$.

21.- Encuentra el único polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ de grado menor o igual que 5 que, tanto al dividirlo por $x^3 + 2x + 1$ como al dividirlo por x^3 da como resto $x^2 + x + 1$.

22.- a) Considera el cuerpo de cuatro elementos $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$. Calcula $[x]^{432}$.
b) Considera el cuerpo de venticinco elementos $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2x + 4)$. Calcula $[x]^{1300}$ y $[2x + 1]^{2281}$