

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Series y Transformadas de Fourier de funciones

1.- Calcula el periodo de las funciones $\sin ax$, $\cos ax$ y de e^{iax} .

2.- Prueba que las siguientes familias de funciones son ortogonales en los dominios que se indican:

- a) $\{\cos nx, \sin nx\}_{n \geq 0}$ en $[-\pi, \pi]$ b) $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $[-\pi, \pi]$
 c) Las familias $\{\cos nx\}_{n \geq 0}$ y $\{\sin nx\}_{n \geq 1}$ en $[0, \pi]$.

3.- Sea f una función periódica de periodo T y continua en $[0, T]$, salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Prueba que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) dt$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.- Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ función 2π -periódica y derivable. Prueba que si f es par (e.d. $f(-x) = f(x)$), entonces se puede escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Y por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, si f es impar (e.d. $f(-x) = -f(x)$).

5.- Halla las series de Fourier, sobre $[-\pi, \pi]$, de las funciones:

- a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \cos^3 x$ c) $f(x) = e^x$ d) $f(x) = |\sin x|$ e) $f(x) = \sin^5 x$.

6.- Sea (x_n) una sucesión numérica convergente a un número x . Sea

$$\tau_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

la sucesión de medias Césaro de (x_n) . Prueba que la sucesión (τ_k) converge a x .

(El Teorema de Fejer asegura que la sucesión de medias Césaro de una serie de Fourier de una función continua 2π -periódica converge uniformemente a dicha función).

7.- Para cada una de las funciones siguientes, en los intervalos que se indican,

- a) Dibuja su gráfica
 b) Justifica la existencia de un desarrollo de Fourier.
 c) Calcula sus coeficientes de Fourier.
 1) $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ 2) $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ 3) $f(x) = |\sin x|$, $x \in (-\pi, \pi)$
 4) $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ 5) $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi)$ 6) $f(x) = x^2$, $x \in (0, 2\pi)$
 7) $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$

8.- Utilizando los resultados del ejercicio anterior deduce:
a partir de 1) el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4};$$

a partir de 2, el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4};$$

a partir de 7, el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

9.- Sean las funciones $f(x) = (x-2)^2, x \in [0, 4]$ y $g(x) = |x|^3, x \in [-3, 3]$. Encuentra expresiones de estas funciones como series de senos y cosenos.

10.- Encuentra expresiones en serie de senos y cosenos (series de Fourier) de las funciones:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -T/2 < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < T/2 \end{cases}, \quad \text{siendo } f \text{ } T\text{-periódica.}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}, \quad \text{siendo } f \text{ } 1\text{-periódica.}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad \text{siendo } f \text{ } 2\text{-periódica.}$$

11.- Sea f una función 2π -periódica y tal que su serie de Fourier converja a $f(x)$ puntualmente para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Si las sucesiones de coeficientes de Fourier $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$ verifican que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, prueba que la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

12.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función par que verifica que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Prueba que la transformada de Fourier de la función f es real (e.d. $F[f](\lambda) \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$). Si f es impar, comprueba que $F[f](\lambda)$ es imaginario puro (e.d. $ReF[f](\lambda) = 0$).

13.-Calcula la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$\text{a) } \chi_{[-\delta, \delta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\delta, \delta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \cos(\alpha x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} k & \text{si } -T \leq t < 0 \\ -k & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{si } t \notin [-T, T] \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

14.- Sea la sucesión de funciones (f_n) , con $f_n(x) = \cos(2\pi\alpha x) \chi_{[-\frac{n}{\alpha}, \frac{n}{\alpha}]}(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dibuja la gráfica de $F[f_n]$ y después calcula el límite puntual de la sucesión de funciones.

15.- Sea $h(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ donde A y α son parámetros positivos.

Prueba que $F[h](\lambda) = \frac{A}{\alpha + i\lambda}$ (Filtro de Butterworth). Diseña un circuito **RC** de modo que su función de transferencia sea precisamente $\frac{3}{4+i\lambda}$ (La segunda parte del ejercicio puede dejarse hasta haber visto E.D.O.).

16.- Prueba en cada caso que las funciones f y g son las mismas, aunque se escriban de forma distintas:

a) $f(x) = \text{sen}(x) \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$ y $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(s\pi)}{1-s^2} \text{sen } sx ds$

b) $g(x) = \text{sen}(x) \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$ y $g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \cos(\frac{s\pi}{2})}{1-s^2} \text{sen } sx ds$.

17.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una señal, la cuál filtramos con un filtro ideal paso bajo $\chi_{[-\delta, \delta]}$ ¿Qué es la componente en frecuencia f_δ de f acotada en la banda $[-\delta, \delta]$ (**Indicación:** $f_\delta(t) = (f * g)(t)$ donde g es el filtro en el dominio del tiempo).

18.- Sea $f(t) = e^{-t} \chi_{[0, \infty)}(t)$.

a) Comprueba que $f(at) * f(bt) = \frac{f(at) - f(bt)}{b-a}$, para $a, b \in (0, \infty)$.

b) Deduce que $f(at) * f(at) = tf(at)$.