

# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

## E.D.O. lineales de segundo orden. La Transformada de Laplace.

**1.-** Las soluciones de la ecuación característica asociada a una E.D.O. lineal de coeficientes constantes son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 0$ . Encuentra la ecuación diferencial y la solución general de la misma. Haz lo mismo en el caso  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 2$ .

**2.-** Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1)  $y'' - y = 0$       2)  $y'' - 8y' + 15y = 0$       3)  $y'' - 3y' - 10y = 0$ .      4)  $y'' - 6y' + 25y = 0$   
5)  $2y'' + 2y' + 3y = 0$       6)  $y'' + 2y' + y = 0$       7)  $y'' + 4y = 0$

**3.-** Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas:

1)  $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$       2)  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2}$       3)  $y'' - 3y' + 2y = 14 \operatorname{sen}(2x) - 18 \operatorname{cos}(2x)$   
4)  $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$       5)  $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$       6)  $2y'' - 4y' - 8y = -50 \operatorname{cos}(3x) - 40 \operatorname{sen}(3x)$ .

**4.-** Resuelve el "problema de contorno":

$$x'' + x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1 \text{ y } x(\infty) = 0$$

**5.-** Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y de contorno:

1)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ,  $y(1) = e^2$ ,  $y'(1) = 3e^2$       2)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 11$   
3)  $2y'' - y' + 2y = e^{4x}$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 2$       4)  $y'' - y' - 5y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{-1}{5}$   
5)  $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2t}(9 \operatorname{sen}(2t) + 4 \operatorname{cos}(2t))$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

**6.-** Supongamos que las raíces de la ecuación  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  tienen parte real negativa. Prueba que toda solución de la E.D.O.  $x'' + ax' + bx = 0$  satisface  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**7.-** Sean  $a, b$  y  $b$  tres constantes positivas. Prueba que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación  $ax'' + bx' + cx = g(t)$ , donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**8.-** Sea la E.D.O.  $x'' + a_1x' + a_2x = q(t)$ , con  $a_2 \neq 0$ , y donde  $q$  es un polinomio de grado 2. Prueba que una solución particular de la ecuación es otro polinomio de grado menor o igual a 2.

**9.-** Sea la E.D.O.  $x'' + a_1x' + a_2x = b(t)$ .

a) Si  $b(t) = e^{\alpha t}$ , prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo  $Ae^{\alpha t}$  o bien  $At^r e^{\alpha t}$ ,  $r = 1$  o  $2$ , en el caso de ser  $\alpha$  una solución de la ecuación característica.

b) Si  $b(t) = \operatorname{cos} \alpha t$ , prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo  $A \operatorname{cos} \alpha t + B \operatorname{sen} \alpha t$  o bien  $t(A \operatorname{cos} \alpha t + B \operatorname{sen} \alpha t)$ , en el caso de que  $\pm \alpha i$  sean soluciones de la ecuación característica.

**10.-** VAMOS A CONSTRUIR UN AMORTIGUADOR (Oscilador amortiguado). Un disco, fijo a una masa  $m$ , está sumergido en un fluido que ejerce una fuerza amortiguadora  $-b \frac{dx}{dt}$ . La fuerza elástica restauradora de un muelle es  $-Kx$ . Halla la ecuación que rige el funcionamiento del amortiguador (ver figura A). Resuelve la ecuación.

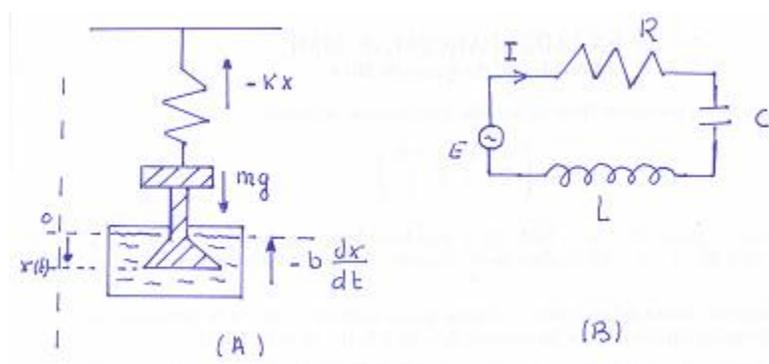


Figura 1: Circuito RLC

**11.-** En un circuito eléctrico RLC (ver figura B) se producen caídas de voltaje en los elementos del circuito que experimentalmente se evalúan como:

en la resistencia  $V_R = -RI$

en el selenoide  $V_L = -L \frac{dI}{dt}$

en el condensador  $V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds$

(donde R, L, y C son constantes que dependen de los elementos colocados en el sistema y donde I es la intensidad que depende del tiempo). Si  $E(t)$  es el voltaje que proporciona una pila, establece (usando las leyes de Kirchoff) la ecuación diferencial que rige el sistema. Deriva la expresión resultante y compárala con la del ejercicio anterior.

**12.-** a) Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $Lf(s_0) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$  existe para algún  $s_0 > 0$  y además  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} f(t) = 0$ . Prueba que para todo  $s > s_0$  existe

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

A la función  $Lf$  se le llama *Transformada de Laplace* de la función f. Comprueba que el dominio de  $Lf$  es al menos  $[s_0, \infty)$ .

b) Comprueba la siguiente tabla de transformadas:

1)  $f(x) = 1$  tiene  $Lf(s) = \frac{1}{s}$       2)  $f(x) = x$  tiene  $Lf(s) = \frac{1}{s^2}$

3)  $f(x) = e^{-\alpha x}$  tiene  $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$       4)  $f(x) = \sin \beta x$  tiene  $Lf(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

5)  $f(x) = \cos \beta x$  tiene  $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}$ .      6) Calcula  $Lf(s)$ , donde  $f(x) = e^{3x} \sin x$ .

**13.-** Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

a) Para  $f$  y  $g$  funciones y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene que  $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ .

b) Si  $f$  es dos veces derivable, entonces  $Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$  y  $Lf''(s) = s^2Lf(s) - sf(0) - f'(0)$ .

**14.-** Calcula la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$f(t) = \begin{cases} x \sin x, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad y \quad g(t) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

**15.-** Se consideran las funciones:

1)  $Lf(s) = \frac{1}{s+3}$       2)  $Lf(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$       3)  $Lf(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$

4)  $Lf(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}$       5)  $Lf(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$ .

en cada caso halla  $f$ , la transformada inversa de Laplace.

**16.-** Sean  $H(s) = \frac{1}{s+3}$ ,  $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$  y  $H(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$  tres funciones de transferencia de otros tantos sistemas lineales causales (circuitos eléctricos). Encuentra las ecuaciones diferenciales que rigen estos circuitos.

**17.-** Resuelve los siguientes problemas de valor inicial usando la Transformada de Laplace:

a)  $y'' - 6y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 11$     b)  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

c)  $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} + 3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$