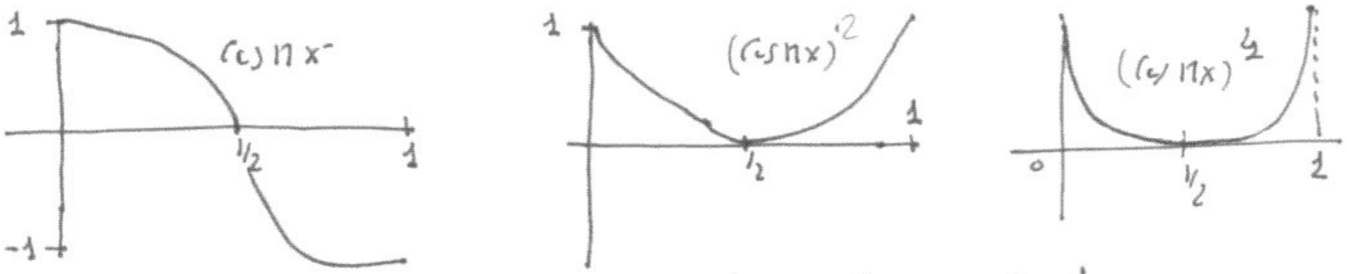
AM

HOJA 1:

EJERCICIO 1:

a) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$; VER TEORÍA

b) $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}$. $x \in [0,1]$

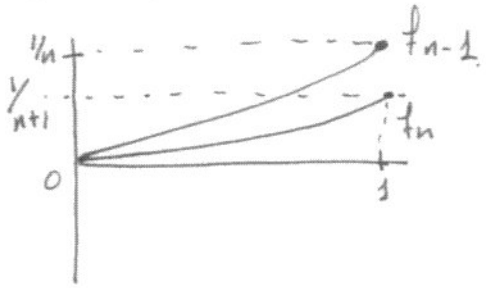


$$\lim_{n\to\infty} (\cos \pi x)^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{SI } x = 0, 1 \\ 0 & \text{SI } x \in (0,1) \end{cases}$$

(YA QUE $0 < |\cos \pi x| < 1$ SI $x \in (0,1)$)

ASÍ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x = 0, 1 \\ 0 & \text{SI } x \in (0,1) \end{cases}$ ES EL LÍMITE PUNTUAL DE LA SUCESIÓN, QUE NO ES LÍMITE UNIFORME YA QUE CADA f_n ES CONTINUA EN $[0,1]$, PERO f NO LO ES. (NO ES CONTINUA EN $x=0$ Y EN $x=1$)

EJERCICIO 2: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ $x \in [0,1]$.



- PRIMERO REPRESENTAMOS $f_n(x)$

$\text{Dom} f = [0,1]$; CONTINUA

$f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \dfrac{1}{n+1}$

$$f_n'(x) = \frac{(1+nx) - nx}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0$$

- LÍMITE PUNTUAL.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- LÍMITE UNIFORME $\left| 0 - f_n(x) \right| = \left| \dfrac{x}{1+nx} \right| \le \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO $f \equiv 0$ ES EL LÍMITE UNIFORME DE LA SUCESIÓN DE FUNCIONES EN $[0,1]$.

AM

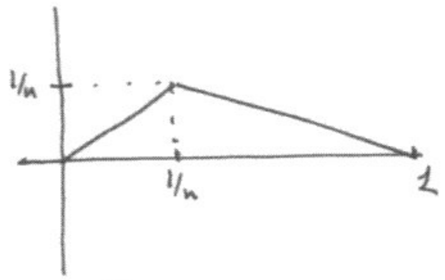
HOJA 1

EJERCICIO 3: a) $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{SI } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{-x}{n-1} + \frac{1}{n-1} & \text{SI } x \in [1/n, 1] \end{cases}$

GRÁFICA DE f_n; COMO $f_n(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} =$

$= \frac{1}{n-1}\left[1 - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$ f_n ES CONTINUA Y SU GRÁFICA

ES



$\max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/n$

LUEGO ES CLARO QUE

$f_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE

EN $[0,1]$.

EJERCICIO 3: c) $f_n(x) = x - x^n$ CON $x \in [0,1]$

SI $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - x^n = \begin{cases} x & \text{SI } x \in [0,1) \\ 0 & \text{SI } x = 1 \end{cases}$

LÍMITE PUNTUAL; EL CUAL NO ES UNIFORME

YA QUE CADA $f_n(x) = x - x^n$ ES CONTINUA EN $[0,1]$,

SIN EMBARGO $f(x) = \begin{cases} x & \text{SI } x \in [0,1) \\ 0 & \text{SI } x = 1 \end{cases}$ NO LO

ES; NO ES CONTINUA EN $x = 1$.

AM

HOJA 1:

PROBLEMA 4: a) $f_n(x) = x e^{-nx}$ $x \geq 0$.

1:) LÍMITE PUNTUAL: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ 0 & \text{SI } x>0 \end{cases}$

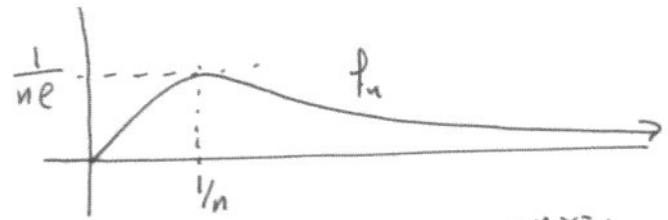
2:) REPRESENTACIÓN DE $f_n(x)$:

$\operatorname{Dom} f_n = [0,\infty)$, CONTINUA $f_n(0)=0$ Y $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-nx} = 0$.

$x e^{-nx} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ Y

$f_n'(x) = e^{-nx} - nx e^{-nx} = e^{-nx}[1-nx]$

$f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ Y $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{ne}$ MÁXIMO



3:) $|f(x) - f_n(x)| = |0 - x e^{-nx}| \underset{\forall x \geq 0}{\leq} \frac{1}{ne} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ INDEPENDIENTEMENTE DE $x \in [0,\infty)$, LUEGO $f_n \to f \equiv 0$ UNIFORMEMENTE EN $[0,\infty)$.

PROBLEMA 4: c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ $x \geq 0$.

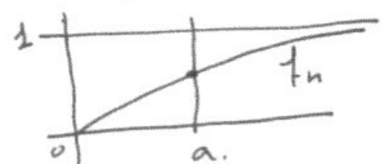
1:) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ 1 & \text{SI } x>0 \end{cases} = f$ LÍMITE PUNTUAL

COMO CADA f_n ES CONTINUA EN $[0,\infty)$, EN PARTICULAR EN $[0,1]$ Y COMO f NO ES CONTINUA EN $[0,1]$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,\infty)$

2:) GRÁFICA DE f_n: $\operatorname{Dom} f_n = [0,\infty)$, CONTINUA, $f_n(0)=0$

Y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$; $f_n'(x) = \frac{n(1+nx) - n^2x}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0$

f SIEMPRE ES CRECIENTE



3:) $\underset{x > a > 0}{|f - f_n|} = \left|1 - \frac{nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx} \underset{x\geq a}{\leq} \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ INDEPENDIENTEMENTE DE $x \in [a,\infty)$.

AM

HOJA 1:

PROBLEMA 5: $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ $x \in [0,2]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases} = f(x) \text{ LÍMITE PUNTUAL}$$

COMO f NO ES CONTINUA EN $[0,2]$ Y CADA f_n SÍ, $\{f_n\}$ NO TIENE LÍMITE UNIFORME EN $[0,2]$

PROBLEMA 6: $f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}$ $x \in [0,1]$

1: LÍMITE PUNTUAL: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$

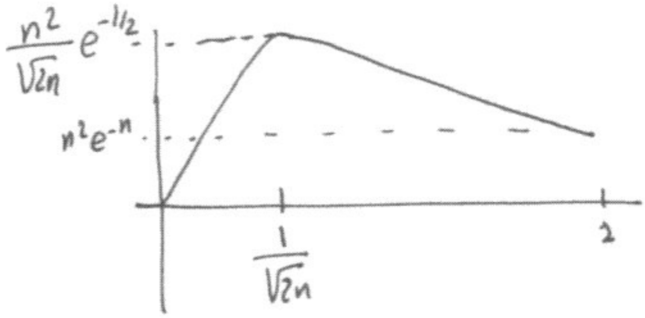
2: GRÁFICA DE $f_n(x)$

$\mathrm{Dom}\, f_n = [0,1]$, DONDE ES CONTINUA; $f_n(0)=0$ y $f_n(1) = n^2 e^{-n}$.

$$f_n'(x) = n^2 e^{-nx^2} - 2x^2 n^3 e^{-nx^2} = n^2 e^{-nx^2}\left[1 - 2nx^2\right]$$

ASÍ $f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n^2 \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n\frac{1}{2n}} = \frac{n^2}{\sqrt{2n}} e^{-1/2}$$



COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n}} e^{-1/2} = \infty$ NO ES POSIBLE QUE HAYA CONVERGENCIA UNIFORME EN EN $[0,1]$.

OTRA FORMA DE VERLO ES QUE

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{n e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{n e^{-n}}{2} + \frac{n}{2} = \infty$$

POR OTRO LADO $\int_0^1 0\,dx = 0$, LUEGO EL LÍMITE PUNTUAL NO PUEDE SER LÍMITE UNIFORME

AM

HOJA 1:

PROBLEMA 8:

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$

SEA $\displaystyle x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n$ SI $x=0$ LA SERIE CONVERGE A CERO

SI $|x|>0$ ESTAMOS ANTE UNA SERIE GEOMÉTRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = x^2 \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1-\frac{1}{x^2+1}} = x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1.$$

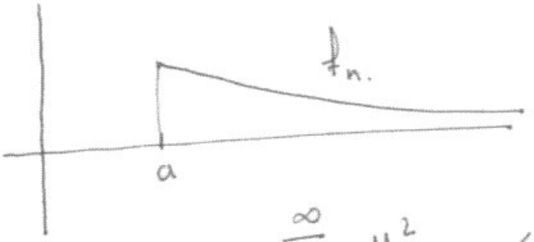
NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $[-M,M]$. YA QUE EL LÍMITE PUNTUAL NO ES CONTINUO.

¿LA HABRÁ EN $[a,M]$ CON $a>0$

SEA $f_n(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n$. CONTINUA EN $[a,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n = 0$

$$f_n'(x) = n\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{n-1} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x>0.$$

$$f_n(a) = \left(\frac{1}{a^2+1}\right)^n \geq f_n(x) \quad \forall x \geq a.$$



LUEGO $\displaystyle\frac{x^2}{(x^2+1)^n} \leq M^2 \frac{1}{(a^2+1)^n} \quad \forall x \in [a,M]$

COMO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{(a^2+1)^n} < \infty$ SE SIGUE DE LA PRUEBA

M-WEIERSTRASS QUE LA SERIE DE FUNCIONES

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A 1 SOBRE $[a,M]$ CON $0<a<M<\infty$.

AM

HOJA 1:

PROBLEMA 1

- $\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

COMO $\operatorname{sen} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ CON CONVERGENCIA UNIFORME EN $[-M, M]$ $\forall M > 0$

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$ CON CONVERGENCIA UNIFORME EN $[1, a]$

OBSERVEMOS, AUNQUE NO ES NECESARIO QUE NOS ALEJAMOS DE $t = 0$

ASÍ $\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^a \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\, dt =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \Big|_1^a =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

- $\int_1^a \frac{e^{-x^2}}{x}\, dx = \int_1^a \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^a \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{k!} =$$

$$= \int_1^a \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^a \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{k!} =$$

$$= \lg a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\, k!} \Big|_1^a =$$

$$= \lg a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)\, k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)\, k!}$$