AM

HOJA 2:

PROBLEMA 1: $f(x) = \operatorname{sen} ax$ tiene un periodo de $\frac{2\pi}{a}$ ya que $f(x+\frac{2\pi}{a}) = \operatorname{sen} a(x+\frac{2\pi}{a}) =$

$= \operatorname{sen}(ax+2\pi) = \operatorname{sen} ax = f(x)$

De la misma forma el periodo de $\cos ax$ es $\frac{2\pi}{a}$

Y como $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$ esta función tiene periodo igual a $\frac{2\pi}{a}$.

PROBLEMA 5:

b) $f(x) = \cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) =$

$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}[\cos 3x + \cos x] =$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$.

$= \boxed{\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x}$ serie de Fourier.

c) $f(x) = e^x$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}]$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, e^x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, e^x dx \right] =$

partes

$= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\operatorname{sen} nx \, e^x dx = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos nx}{n} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, e^x dx \right]$

partes

$= \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos n\pi \, e^{\pi} - \cos n\pi \, e^{-\pi} \right] - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, e^x dx$

despejando

$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}\frac{(-1)^n}{n^2\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}] = \frac{(-1)^n e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, e^x dx =$ se procede aplicando dos veces el método de integración por partes

AM

HOJA 2°

PROBLEMA 6: SI $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

ENTONCES $\left| x - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right| = \left| \frac{nx}{n} - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right| =$

$$= \frac{1}{n} \left| (x-x_1) + (x-x_2) + \cdots + (x-x_n) \right|$$

ASÍ DADO $\varepsilon > 0$

PARA $\varepsilon/2 > 0$ $\exists k_0$ TAL QUE $\forall k \geq k_0 \Rightarrow |x - x_k| \leq \varepsilon/2$

POR OTRO LADO $\exists n_0$ TAL QUE SI $n \geq n_0$

$$\frac{\left| (x-x_1) + \cdots + (x-x_{k_0}) \right|}{n} < \varepsilon/2$$

ASÍ SI $n \geq n_0 \geq k_0$

$$\left| x - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right| \leq 1/n \left| (x-x_1) + \cdots + (x-x_{k_0}) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0+1}^{n} |x-x_k| \leq$$

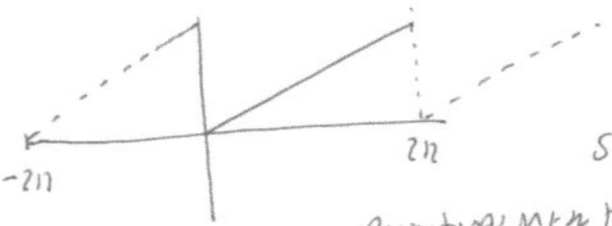
$$\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{n}(n-k_0)\varepsilon/2 < \varepsilon$$

LUEGO $\sigma_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

HOJA 2:

AM

PROBLEMA 7: 5) $f(x) = x \quad x \in (0, 2\pi)$



FUNCIÓN 2π-PERIÓDICA, CONTINUA Y DERIVABLE EN $\mathbb{R} - \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

SU SERIE DE FOURIER CONVERGE PUNTUALMENTE EN $(0, 2\pi)$.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{\text{Ejer. 3:}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{4\pi^2}{2} = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \underset{\text{Ejer 3:}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}\,nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\text{sen}\,nx\,dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{-2\pi}{\pi n} = \frac{-2}{n}.$$

LUEGO $\quad x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}\,\text{sen}\,nx$

PARA $x = \pi/2 \quad \text{sen}\,n\pi/2 = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ (-1)^k & \text{SI } n = 2k+1 \text{ IMPAR} \end{cases}$

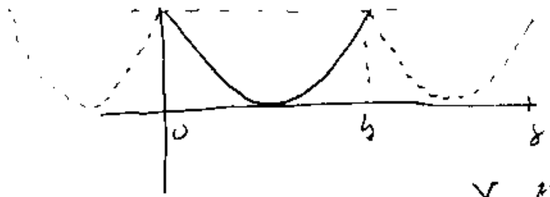
LUEGO $\quad \pi/2 = \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{2k+1}$

ASÍ $\quad \boxed{\pi/4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$

A.M

HOJA 2:

EJERCICIO 9:/ SEA $f(x)=(x-2)^2$, $x\in[0,4]$



función que se puede extender de forma 4-periódica y así es continua en todo $\mathbb{R}$ y en todos sus puntos hay derivadas laterales, luego su serie de Fourier en $\cos n\frac{2\pi}{4}x$ y $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2}nx$ $n\in\mathbb{N}$ converge puntualmente a f

Por ser la extensión de f par $\Rightarrow b_n=0$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{4}\int_0^4 (x-2)^2\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^4\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{4}\int_0^4 (x-2)^2\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{(x-2)^2\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x}{n\frac{\pi}{2}}\Big|_0^4}_{0}-\frac{4}{n\pi}\int_0^4(x-2)\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x\,dx\right]\underset{\text{partes}}{=}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{(x-2)\cos n\frac{\pi}{2}x}{n\frac{\pi}{2}}\Big|_0^4-\frac{1}{n\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^4\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx}_{0}\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[2+2\right]=\frac{16}{n^2\pi^2}$$

Así $$(x-2)^2=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\frac{\pi}{2}x \quad \forall x\in[0,4].$$

OBSERVACIÓN para $x=0$: $4=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}$

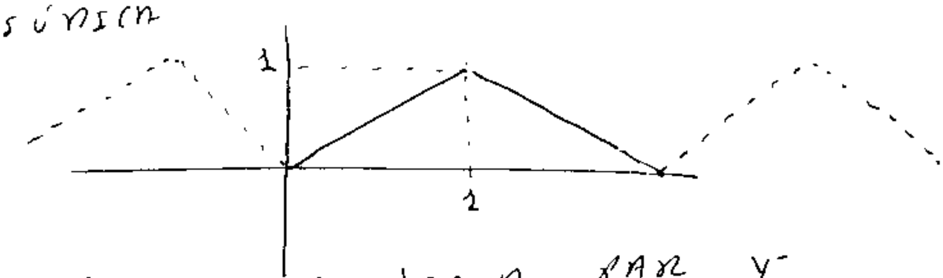
$$\Rightarrow \frac{1}{16}\left[4-\frac{4}{3}\right]\pi^2=\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

AM

HOJA 2:

PROBLEMA 10: c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{SI } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{SI } 1 < x \le 2 \end{cases}$

f 2-PERIÓDICA



f ES 2-PERIÓDICA, CONTINUA, PAR Y SUS DERIVADAS LATERALES EXISTEN PARA TODO $x \in \mathbb{R}$

ASÍ LA SERIE DE FOURIER DE f EN $\cos n \frac{2\pi}{2} x$ Y $\operatorname{sen} n \frac{2\pi}{2} x$, $n \geq 0$, CONVERGE PUNTUALMENTE A $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

POR SER PAR $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\, 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1/2$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos n\pi x\,dx = \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx + \int_1^2 2 \cos n\pi x\,dx -$$

$$- \int_1^2 x \cos n\pi x\,dx = 0 \text{ TAMBIÉN ES IGUAL A } =$$

$$= \int_{-1}^0 -x \cos n\pi x\,dx + \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx =$$

$y = -x$

$dy = -dx$

EN LA 1ª INTEGRAL

$$= 2 \int_0^1 x \cos n\pi x\,dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$2 \left[\frac{x \operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x\,dx \right] = \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 \right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ IMPAR} \\ 0 & n \text{ PAR} \end{cases}$$

ASÍ $f(x) = 1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2} \cos(2k+1)\pi x$

OBSERVACIÓN: SI $x = 1$ $\quad f(1) = 1 = 1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$

LUEGO $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

AM

HOJA 2:

PROBLEMA 11:

$$|a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n| + |b_n| \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$,

así por el criterio M-Weierstrass

la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$

converge uniformemente a su límite puntual en $[-\pi, \pi]$. Si este límite puntual es f se tiene la fórmula completa.

PROBLEMA 12: Si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$, existe su transformada de Fourier $\hat{f}$. Por ser

- f par la función $f(t) \operatorname{sen} st$ es una función impar sobre $\mathbb{R}$, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) \operatorname{sen} st\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt =$$

$$= -\int_{\infty}^{0} f(-x) \operatorname{sen} s(-x)(-1)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt = 0.$$

$t = -x$, $dt = -dx$ cambio en la primera integral

Por tanto $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i ts}\, dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt \in \mathbb{R}$$

- Si f es impar, entonces $f(t) \cos st$ es una función impar sobre $\mathbb{R}$ y así $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt = 0$,

Por tanto $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i st}\, dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt.$