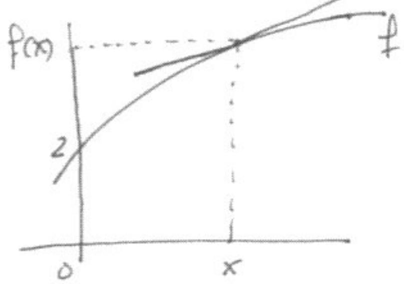
AM

HOJA 3:

PROBLEMA 1:

$y = f(x) + f'(x)(\bar{x} - x)$.



NOS DICEN QUE

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + 3 \\ f(0) = 2. \end{cases}$$

ESTO ES UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (E.D.O.). LINEAL DE 1º ORDEN NO HOMOGÉNEA.

TAMBIÉN SE PUEDE VER COMO UNA EDO DE VARIABLES SEPARADAS Y ASÍ LA VAMOS A RESOLVER.

$$\frac{f'(x)}{f(x)+3} = 1$$

LUEGO $\displaystyle\int_0^x \frac{f'(s)}{f(s)+3}\,ds = \int_0^x ds = x$.

POR OTRO LADO $\displaystyle\int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{f(s)+3} = \lg(f(s)+3)\Big|_0^x =$

$$= \lg(f(x)+3) - \lg 5$$

COMO $\lg(f(x)+3) - \lg 5 = x$ DESPEJANDO

$$\lg(f(x)+3) = x + \lg 5$$

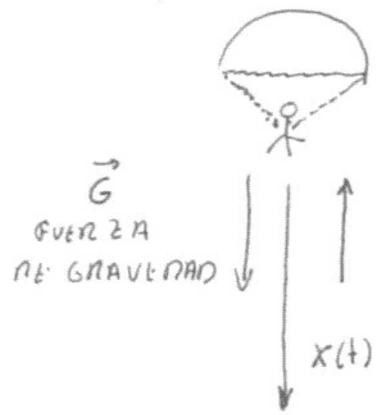
$$f(x) + 3 = e^{x+\lg 5} = 5e^x$$

LUEGO $\boxed{f(x) = 5e^x - 3}$

AM

HOJA 3ª

PROBLEMA 2:



$x(t)$ MOVIMIENTO DEL PARACAIDISTA; EN UN INSTANTE t, ESTARÁ A UNA ALTURA $x(t)$.

LA RESULTANTE DE LAS FUERZAS DEL SISTEMA ES $\vec{F} = \vec{G} - \vec{R}$ ($\vec{R}$ LLEVA MENOS POR SER DE SENTIDO CONTRARIO A $\vec{G}$).

$\vec{G} = cte = mg$ DONDE
m MASA PARACAIDISTA
g CONSTANTE DE GRAVEDAD $\simeq 10 m/s$.

$\vec{R} = kV^2$ DONDE V ES LA VELOCIDAD DEL PARACAIDISTA $V(t) = x'(t)$.

ASÍ POR LA 2ª LEY DE NEWTON

$$m x''(t) = mg - K x'^2(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad x''(t) = g - \frac{k}{m} x'^2(t).$$ E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS

ASÍ $$\int \frac{x''(t)}{g - \frac{k}{m}x'^2(t)}\, dt = \int 1\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int x''(t)\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}x'(t)} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}x'(t)} \right) dt = t + M$$ CON M CONSTANTE

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\tfrac{m}{k}}\, Lg\left(\sqrt{g} - \sqrt{\tfrac{k}{m}}\, x'(t)\right) + \sqrt{\tfrac{m}{k}}\, Lg\left(\sqrt{g} + \sqrt{\tfrac{k}{m}}\, x'(t)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}}\; Lg\left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{k/m}\, x'(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m}\, x'(t)} \right) = t + M.$$

LUEGO $$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{k/m}\, x'(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{k/m}\, x'(t)} = e^{\sqrt{k/m}\,(t+M)}$$

AM

HOJA 3ª

PROBLEMA 2: (CONTINUACIÓN)

OPERANDO $\sqrt{g} + \sqrt{k/m}\, x'(t) = \sqrt{g}\, e^{\sqrt{k/m}(t+M)} - \sqrt{k/m}\, e^{\sqrt{k/m}(t+M)}\, x'(t)$

LUEGO $\sqrt{k/m}\left(1+e^{\sqrt{k/m}(t+M)}\right)x'(t) = \sqrt{g}\left(e^{\sqrt{k/m}(t+M)} - 1\right)$

Y ASÍ
$$x'(t) = \sqrt{g}\,\sqrt{m/k}\left(\frac{e^{M\sqrt{k/m}}\,e^{\sqrt{k/m}\,t}-1}{e^{M\cdot\sqrt{k/m}}\,e^{\sqrt{k/m}\,t}+1}\right)$$

PARA $M \in \mathbb{R}$ (M DEPENDE DEL DATO INICIAL $x'(0) = M_0$).

INTEGRANDO $x'(t)$ PODRÍAMOS CALCULAR $x(t)$;

LO MÁS INTERESANTE ES QUE

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{g}\,\sqrt{m/k}\left(\frac{e^{M\sqrt{k/m}}\,e^{\sqrt{k/m}\,t}-1}{e^{M\sqrt{k/m}}\,e^{\sqrt{k/m}\,t}+1}\right) = \sqrt{g}\,\sqrt{m/k}$$

ES DECIR LA VELOCIDAD DE CAÍDA TIENDE A ESTABILIZARSE EN TORNO A $\sqrt{g}\,\sqrt{m/k}$

DONDE k PUEDE MODIFICARSE VARIANDO EL TAMAÑO DEL PARACAÍDAS.

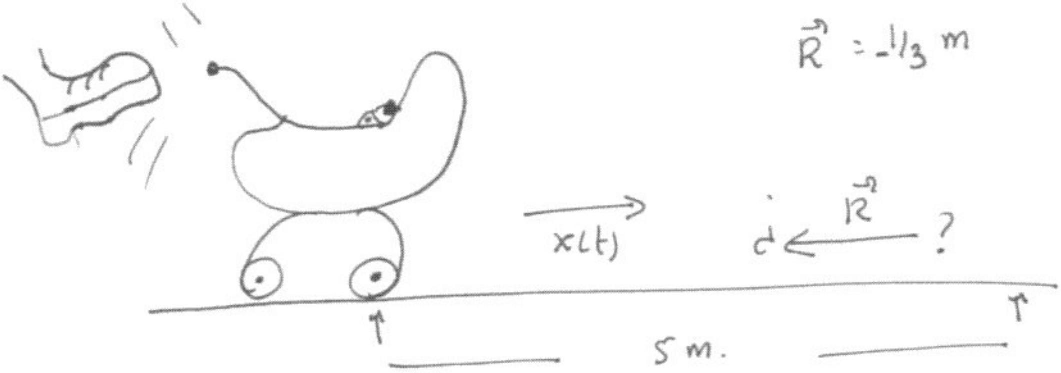
HOJA 3:

PROBLEMA 3:

$x(0) = 0$

$x'(0) = 2\, m/s$

$\vec{R} = -1/3\, m$



POR LA 2ª LEY DE NEWTON

$$m\, x''(t) = -\tfrac{1}{3}\, m.$$

ASÍ $\left\{ \begin{array}{l} x''(t) = -\tfrac{1}{3} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{array} \right.$ E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS CON VALORES INICIALES

$$\int_0^t x''(s)\,ds = \int_0^t -1/3 \iff x'(t) - x'(0) = -\tfrac{1}{3} t$$

Y ASÍ $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -1/3\, t + 2 \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$ E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS CON UN DATO INICIAL

$$\int_0^t x'(s)\,ds = x(t) - x(0) = x(t)$$

$$\int_0^t -1/3\, s + 2\,ds = -1/6\, s^2 + 2s \Big|_0^t = -1/6\, t^2 + 2t$$

ASÍ $x(t) = t\,(2 - 1/6\, t) \quad t > 0$

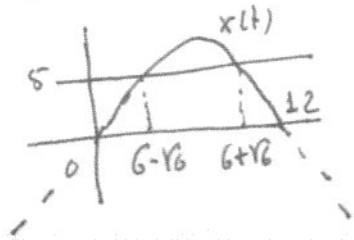
¿PARA ALGÚN $t_0 > 0 \Rightarrow x(t_0) = 5$? $\quad 5 = x(t) = t(2 - 1/6\, t).$

$$\iff -1/6\, t^2 + 2t - 5 = 0 \iff t^2 - 12t + 30 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = 6 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{24} = 6 \pm \sqrt{6}$$

LUEGO PARA $t = 6 - \sqrt{6} > 0$ EL COCHECITO LLEGA A LA CALZADA.

AHORA $x(t) = t(2 - 1/6\, t)$



SEGÚN ESTA GRÁFICA EL COCHECITO VUELVE DE NUEVO AL ORIGEN.
NO ES REAL UNA FUERZA $\vec{R} = -1/3\, m$ CONSTANTE.

AM

HOJA 3:

PROBLEMA 4:

$y(t)$ ES LA CANTIDAD DE BACTERIAS EN EL MOMENTO t.

$x(t)$ LA CANTIDAD DE TÓXINA " " "

$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ x'(t)=k \quad \text{CONSTANTE} \end{array}\right\}$ ASÍ $x(t)=tk$

$y_0 = y(0)$ BACTERIAS EN EL MOMENTO $t=0$ (EN EL ORGANISMO)

$$\begin{cases} y'(t) = \underbrace{k_1\, y(t)}_{\text{CRECIMIENTO}} - \underbrace{k_2\, y(t)\, k t}_{\text{DECRECIMIENTO POR TÓXINA SEGÚN LA HIPÓTESIS}} \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

ASÍ $\begin{cases} \dfrac{y'(t)}{y(t)} = k_1 - k_2 k t \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ E.D.O LINEAL, HOMOGÉNEA Ó E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS.

INTEGRANDO

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)}\, ds = \int_0^t k_1 - k_2 k s\, ds \quad \text{CON } k_1 \text{ Y } k_2 \text{ CONSTANTES}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lg y(t) - \lg y_0 = k_1 t - k_2 k \frac{t^2}{2} + k_3$$

ASÍ $\quad y(t) = y_0\, e^{k_1 t - k_2 k \frac{t^2}{2} + k_3} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ //

HOJA 3ª

PROBLEMA 5º)

3) $\frac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen} x$ y es función de x, luego

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \operatorname{sen} x$$

Integrando $\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx$

Como $\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = -\frac{1}{y(x)}$ se sigue que $\frac{1}{y(x)} = \cos x + k$

y $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$ y por tanto $\boxed{y(x) = \frac{1}{\cos x + k}}$

4) $(1+e^t)\,x(t)\,x'(t) = e^t$ luego

$$x(t)\,x'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$ integrando

$$\int x(t)\,x'(t)\,dt = \frac{x^2(t)}{2}$$

$$\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int \frac{1}{1+u}\,du = Lg\,(1+u) = Lg\,(1+e^t)$$

$u = e^t$
$du = e^t\,dt$

Luego $\frac{x^2(t)}{2} = Lg\,(1+e^t) + k$

Así $\boxed{x(t) = \sqrt{Lg\,(1+e^t)^2 + k}}$

HOJA 3:

PROBLEMA 5:

I) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y^2 - 2y \\ y(0) = 2. \end{cases}$

TENEMOS QUE $\displaystyle\int \frac{y'(t)}{2(y^2-y)}\,dt = \int dt = t + k$

$$\int \frac{y'(t)}{2(y^2-y)}\,dt \underset{\substack{u = y(t) \\ du = y'(t)dt}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\, Lg(u-1) - Lg\, u = \tfrac{1}{2}\, Lg \frac{u-1}{u} = Lg \sqrt{\frac{y(t)-1}{y(t)}}$$

ASI $\quad Lg \sqrt{\dfrac{y(t)-1}{y(t)}} = t + k$

DESPEJANDO $\quad \dfrac{y(t)-1}{y(t)} = (e^k e^t)^2 = e^{2k} e^{2t}$

COMO $y(0) = 2 \qquad \dfrac{2-1}{2} = e^{2k}$

LUEGO $\quad \dfrac{y(t)-1}{y(t)} = \tfrac{1}{2}\, e^{2t}$

DESPEJANDO $\quad y(t) - 1 = \tfrac{1}{2}\, e^{2t}\, y(t)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \tfrac{1}{2}e^{2t})\, y(t) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{y(t) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{2t}}}$

IV) $\begin{cases} y' x^3 \operatorname{sen} y = 2 \\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ ASI $\displaystyle\int y' \operatorname{sen} y\, dx = \int \frac{2}{x^3}\, dx = -\frac{1}{x^2}$

Y $\quad -\cos y(x) = -\dfrac{1}{x^2} + k$

$\lim\limits_{x\to\infty} -\cos y(x) = -\cos \pi/3 = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{1}{x^2} + k = k$

LUEGO $\quad \cos y(x) = \dfrac{1}{x^2} + \cos \pi/3$

$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \operatorname{Arc\,cos}\left(\tfrac{1}{x^2} + \cos \pi/3\right)}$

HOJA 3:

PROBLEMA 6)

2) $\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x \iff y'(x) = -2y(x) + \cos x$

E.D.O LINEAL NO HOMOGÉNEA

RESOLVAMOS LA PARTE HOMOGÉNEA

$$y'(x) = -2y(x) \iff \frac{y'(x)}{y(x)} = -2 \iff \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = -2x + k$$

$$\Rightarrow \lg y(x) = -2x + k$$

ASÍ $y(x) = e^{k} e^{-2x}$

APLICANDO EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

$$y_0(x) = k(x)\, e^{-2x}$$

$$y_0'(x) = k'(x)\, e^{-2x} + \cancel{k(x)(-2e^{-2x})} = \cancel{-2y_0(x)} + \cos x$$

ASÍ $k'(x) = e^{2x} \cos x$

Y $k(x) = \int e^{2x} \cos x\, dx$.

RESOLVAMOS ESTA ÚLTIMA INTEGRAL POR PARTES

$$\int \cos x\, e^{2x}\, dx = \cos x \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\, e^{2x}\, dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$= \cos x \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\int \cos x\, e^{2x}\, dx$$

ASÍ $\frac{5}{4}\int \cos x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \cos x\, e^{2x} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x\, e^{2x}$

LUEGO $k(x) = \left(\frac{2}{5} \cos x \;\; \frac{1}{5} \operatorname{sen} x\right) e^{2x}$

POR TANTO $y_0(x) = 2/5 \cos x + 1/5 \operatorname{sen} x$ SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA NO HOMOGÉNEO

$$\boxed{y(t) = 2/5 \cos x + 1/5 \operatorname{sen} x + k\, e^{-2x}}$$ SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN.

HOJA 3:

PROBLEMA 6:

V) $x' + 2tx = t^3, \quad x(0) = 1$

X ES FUNCIÓN DE t.

$$\begin{cases} x'(t) = -2t\,x(t) + t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA DE CAUCHY PARA UNA EDO LINEAL NO HOMOGÉNEA

LA PARTE HOMOGÉNEA:

$$x'(t) = -2t\,x(t) \iff \int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int -2t\,dt$$

$$\iff \lg x(t) = -t^2 + k$$

$$\iff x(t) = e^{-t^2+k} = e^k e^{-t^2}$$

LUEGO $k e^{-t^2}$ ES UNA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA HOMOGÉNEO

APLICANDO EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

$$x_0(t) = k(t)\,e^{-t^2}$$

$$x_0'(t) = k'(t)\,e^{-t^2} + \cancel{k(t)(-2t\,e^{-t^2})} =$$

$$= \cancel{-2t\,x_0(t)} + t^3$$

$$\Rightarrow k'(t) = t^3 e^{t^2}$$

ASÍ $k(t) = \int t^3 e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^2 (2t\,e^{t^2})\,dt = \underset{\text{PARTES}}{\frac{1}{2} t^2 e^{t^2}} - \int t\,e^{t^2}\,dt$

$$= \tfrac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} = \left(\tfrac{1}{2} t^2 - \tfrac{1}{2}\right) e^{t^2}$$

LUEGO $x_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2}$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$x(t) = \tfrac{1}{2} t^2 - \tfrac{1}{2} + k e^{-t^2}$$

SI $x(0) = 1 \qquad 1 = -\frac{1}{2} + k$ LUEGO $k = \frac{3}{2}$

Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES $\boxed{x(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-t^2}}$

HOJA 3ª

PROBLEMA 7ª

t TIEMPO; X(t) POBLACIÓN EN EL TIEMPO t.

LA TASA ES LA VARIACIÓN DE $x(t)$, $x'(t)$, PARTIDO POR LA POBLACIÓN

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a = cte.$$

LUEGO $x'(t) = a\,x(t)$ E.D.O LINEAL DE 1ª ORDEN

ASÍ $x(t) = k e^{at}$ ¿ $x(0) = k e^{a0} = k$?

AHORA $x(5) = k e^{a5} = 40.000$ LUEGO $\Rightarrow$ $\boxed{k = 40.000 e^{-5a}}$

POR OTRO LADO $x(3) = 2x(0)$

$\Leftrightarrow$ $x(3) = \cancel{40.000 e^{-5a}} e^{3a} = 2 \cancel{40.000 e^{-5a}} e^{a \times 0} = 2x(0)$

$\Leftrightarrow$ $e^{3a} = 2$ LUEGO $a = \frac{1}{3} \lg 2$

Y ASÍ $x(t) = 40.000 e^{-\frac{5}{3}\lg 2} e^{\frac{t}{3}\lg 2} =$

$= 40.000 e^{\frac{1}{3}\lg 2[t-5]}$; ASÍ $x(0) = 40.000 e^{-\frac{5}{3}\lg 2} =$

$= 40.000 \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$.

PROBLEMA 8ª

a) SI $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ $\Rightarrow y' = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) \underset{f_1 \text{ y } f_2 \text{ soluciones}}{=}$

$= c_1[-p(x) f_1(x)] + c_2[-p(x) f_2(x)] =$

$= -p(x)[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = -p(x) f(x)$ c.q.d

b) SEA $y(x) = f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ CON f SOLUCIÓN DE $y' + p(x) y = g(x)$ Y f_1 Y f_2 SOLUCIONES DE $y' + p(x) y = 0$

ASÍ $y'(x) = f'(x) + c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = -p(x) f(x) + g(x) - c_1 p(x) f_1(x) - c_2 p(x) f_2(x)$

$= -p(x)[f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] + g(x) = -p(x) y + g(x)$

LUEGO y ES SOLUCIÓN NO HOMOGÉNEA