HOJA 4ª

AM

PROBLEMA 1:

PARA EL CASO $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA SERÁ $(\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
ESTA ECUACIÓN PROVIENE DE LA EDO LINEAL DE 2º ORDEN

$$\boxed{x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0}$$

CUYA SOLUCIÓN GENERAL VIENE DADA POR

$$x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 2:

1) $y'' - y = 0$ EC. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 - 1 = 0$ ASÍ $\lambda = \pm 1$

LUEGO $\boxed{y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

4) $y'' - 6y' + 25y = 0$ EC. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

ASÍ $\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-64} = 3 \pm 4i$

LUEGO $\boxed{y(t) = k_1 e^{3t}\cos 4t + k_2 e^{3t}\operatorname{sen} 4t \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

6) $y'' + 2y' + y = 0$ EC. CARACTERÍSTICA ES $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0$ LUEGO $\lambda = -1$ ES RAÍZ DOBLE; POR TANTO

$$\boxed{y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

AM

HOJA 4:

PROBLEMA 3:

6) $2y'' - 4y' - 8y = -50\cos 3t - 40\operatorname{sen} 3t$

VEAMOS EL PROBLEMA HOMOGÉNEO $2y'' - 4y' - 8y = 0$

EC CARACTERÍSTICA ES $2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$

ASÍ $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

LUEGO $\pm 3i$ NO ES RAÍZ DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

PROBAREMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR $y_p(t) = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t$

$y_p'(t) = -3A\operatorname{sen} 3t + 3B\cos 3t$

$y_p''(t) = -9A\cos 3t - 9B\operatorname{sen} 3t$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN:

$2(-9A\cos 3t - 9B\operatorname{sen} 3t) - 4(-3A\operatorname{sen} 3t + 3B\cos 3t) - 8(A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t) =$

$= (-18A - 12B - 8A)\cos 3t + (-18B + 12A - 8B)\operatorname{sen} 3t =$

$= -50\cos 3t - 40\operatorname{sen} 3t$

ASÍ $\begin{cases} -26A - 12B = -50 \\ 12A - 26B = -40 \end{cases} \iff \begin{matrix} 13A + 6B = 25 \\ 6A - 13B = 20 \end{matrix}$

LA SOLUCIÓN DE ESTE SISTEMA ES ÚNICA $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 6 & -13 \end{vmatrix} \neq 0$

ASÍ $A = 1$ y $B = 2$

Y LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$\boxed{y(t) = k_1 e^{(1+\sqrt{5})t} + k_2 e^{(1-\sqrt{5})t} + \cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t}$$

AM

HOJA 4:

PROBLEMA 4:

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \quad y \quad x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \end{cases}$$

LA EC. CARACTERÍSTICA DE LA EDO ES $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

CUYAS RAÍCES SON $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{2t} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

AHORA $x(0) = k_1 + k_2 = 1$

$$y \quad \lim_{t\to\infty} k_1 e^{-3t} + k_2 e^{2t} = \begin{cases} 0 & \text{SI } k_2 \neq 0 \\ \operatorname{sign} k_2\, \infty & \text{SI } k_2 \neq 0 \end{cases}$$

LUEGO LAS CONSTANTES QUE BUSCAMOS SON $k_1 = 1$ Y $k_2 = 0$

ASÍ LA SOLUCIÓN ÚNICA DEL PROBLEMA DE CONTORNO ES $x(t) = e^{-3t}$.

PROBLEMA 5: a)

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 11 \end{cases}$$

EC. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, $\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

ASÍ $y(t) = k_1 e^{5t} + k_2 e^{t}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA.

$$y(0) = 3 = k_1 + k_2$$
$$y'(0) = 11 = 5k_1 + k_2$$

ASÍ $k_1 = 2$ Y $k_3 = 1$

Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$y(t) = 2e^{5t} + e^{t}.$$

HOJA 4:

AM

PROBLEMA 5:)

$$5)\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2t}(9\,\mathrm{sen}(2t) + 4\cos(2t)) \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \end{cases}$$

LA EC CARACTERÍSTICA DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ES:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0; \quad \text{ASÍ } \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA SERÁ

$$y(t) = y_0(t) + k_1 e^{3t} + k_2 e^{2t} = y_0(t) + e^{2t}(k_1 e^{t} + k_2)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{2t}(k_1 e^{t} + k_2) = \pm\infty$$

LUEGO SOLO CABE ESPERAR QUE LA SOLUCIÓN PARTICULAR y_0 VERIFIQUE QUE $\lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$; PERO ESTO ES CLARO YA QUE y_0 SERÁ DEL TIPO

$$y_0(t) = e^{-2t}(A\,\mathrm{sen}2t + B\cos 2t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

($-2 \pm 2i$ NO ES RAÍZ DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO; ASÍ SE DEBE DE INTENTAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR COMO y_0)

$$y_0'(t) = -2e^{-2t}(A\,\mathrm{sen}2t + B\cos 2t) + e^{-2t}(2A\cos 2t - 2B\,\mathrm{sen}2t)$$

$$y_0''(t) = -4e^{-2t}(A\,\mathrm{sen}2t + B\cos 2t) - 2e^{-2t}(2A\cos 2t - 2B\,\mathrm{sen}2t)$$
$$+ e^{-2t}(-4A\,\mathrm{sen}2t - 4B\cos 2t) - 2e^{-2t}(2A\cos 2t - 2B\,\mathrm{sen}2t)$$

ASÍ ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y_0

$$\{(-8A + 4B)\,\mathrm{sen}2t + (-4B - 4A)\cos 2t\}e^{-2t} - 5e^{-2t}[(-2A - 2B)\,\mathrm{sen}2t + (2A - 2B)\cos 2t]$$
$$+ \{6A\,\mathrm{sen}2t + 6B\cos 2t\}e^{-2t} = 2e^{-2t}(9\,\mathrm{sen}2t + 4\cos 2t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A + 4B + 10A + 10B + 6A = 8A + 14B = 18 \\ -4B - 4A - 10A + 10B + 6B = -14A + 12B = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 4A + 7B = 9 \\ -7A + 6B = 4 \end{matrix}\right. \qquad \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$ LUEGO EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA NO NULA, LUEGO

$$y_0(t) = (A\,\mathrm{sen}2t + B\cos 2t)e^{-2t} \neq 0,$$ ES SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN Y ES LA ÚNICA QUE PARA $t\to\infty$ CONVERGE A CERO.

AM

HOJA 4ª

PROBLEMA 6:

SEA $x'' + ax' + bx = 0$ CON EC. CARACTERÍSTICA

$$\lambda^2 + a\lambda + b = \begin{cases} (\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2) & \text{con } \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \text{ó} & \\ (\lambda - (\alpha+\beta i))(\lambda - (\alpha - \beta i)) & \text{con } \alpha < 0 \end{cases}$$

EN EL PRIMER CASO CUALQUIER SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ES DEL TIPO $x(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

EN EL SEGUNDO CASO

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos\beta t + B e^{-\alpha t} \sin\beta t$$

$$|x(t)| \leq |A| e^{-\alpha t} + |B| e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

LUEGO EN CUALQUIER CASO LAS SOLUCIONES TIENDEN A CERO CUANDO $t \to \infty$.

PROBLEMA 7: SI f_1 Y f_2 SON DOS SOLUCIONES DE $ax'' + bx' + cx = g(t)$, ENTONCES $y(t) = f_1(t) - f_2(t)$ ES UNA SOLUCIÓN DE $ax'' + bx' + cx = 0 \Leftrightarrow$

$$x'' + \frac{b}{a}x' + \frac{c}{a}x = 0$$

CON $\frac{b}{a} > 0$ Y $\frac{c}{a} > 0$. EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE ESTA ÚLTIMA ECUACIÓN ES $\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}$ Y SUS RAÍCES SON

$$\lambda = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{2}$$

SI $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm \beta i$ CON $\alpha = -\frac{b}{2a} < 0$.

SI $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} < 0$;

LUEGO POR LO PROBADO EN EL EJERCICIO ANTERIOR

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

HOJA 5ª

PROBLEMA 8:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = q(t) = a + bt + ct^2$$

SERÁ SUFICIENTE CON PROBAR QUE PARA $q_i(t) = c_i t^i$ $i = 0,1,2$

LA ECUACIÓN $x'' + a_1 x' + a_2 x = c_i t^i$ TIENE UNA

SOLUCIÓN PARTICULAR DE TIPO $y_0(t) = r_0 + \dots + r_i t^i$ $i = 0, 1$ ó 2.

VEAMOS EL CASO $i = 2$ (LOS OTROS CASOS SON MAS CORTOS)

SI $q_2(t) = ct^2$;

COMO a_1 Y a_2 SON DISTINTOS DE CERO LA

EC. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ NO TIENE

POR RAÍZ A $\lambda = 0$

SEA $y_0(t) = r_0 + r_1 t + r_2 t^2$

$y_0'(t) = r_1 + 2 r_2 t$

$y_0''(t) = 2 r_2$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON LA SOLUCIÓN y_0

$$2r_2 + a_1 (r_1 + 2 r_2 t) + a_2 (r_0 + r_1 t + r_2 t^2) = ct^2$$

ASÍ
$$\begin{aligned} a_2 r_2 &= c \\ a_2 r_1 + 2 a_1 r_2 &= 0 \\ a_2 r_0 + a_1 r_1 + 2 r_2 &= 0 \end{aligned}$$
COMO $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_2 & 2a_1 \\ a_2 & a_1 & 2 \end{vmatrix} = -a_2^3 \neq 0$

LA SOLUCIÓN DE ESTE SISTEMA ES ÚNICA Y NO

NULA. LUEGO EXISTE LA SOLUCIÓN PARTICULAR

y_0 DE GRADO 2 YA QUE $r_2 = \frac{c}{a_2} \neq 0$ SI $c \neq 0$.

AM

HOJA 4:

PROBLEMA 9:

a) SEA $x'' + a_1 x' + a_2 x = e^{\alpha t}$

I) SI $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \alpha)^2$

SEA $y_0(t) = A t^2 e^{\alpha t}$

$y_0'(t) = 2At e^{\alpha t} + \alpha A t^2 e^{\alpha t}$

$y_0''(t) = 2A e^{\alpha t} + \alpha 2A t e^{\alpha t} + 2\alpha A t e^{\alpha t} + \alpha^2 A t^2 e^{\alpha t}$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y_0

$(2A + 4\alpha A t + \alpha^2 A t^2)e^{\alpha t} + a_1(2At + \alpha A t^2) e^{\alpha t} + a_2 A t^2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$

LUEGO
$$\alpha^2 A + a_1 \alpha A + a_2 A = A(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) = 0$$
$$4\alpha A + a_1 2A = A(4\alpha + 2a_1) = 0$$
$$2A = 1$$

COMO $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$

Y $(\lambda - \alpha)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = \lambda^2 + a_1\alpha + a_2$ ASÍ $4\alpha + 2a_1 = 0$.

SE SIGUE QUE $2\alpha = -a_1$ SE SIGUE QUE $y_0(t) = \frac{1}{2} A t^2 e^{\alpha t}$

POR TANTO SI $A = 1/2$, SE SIGUE QUE

ES SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN.

II) SI $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \beta)(\lambda - \alpha) = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \beta\alpha$. $\beta \neq \alpha$

SEA $y_0(t) = A t e^{\alpha t}$

$y_0'(t) = A e^{\alpha t} + \alpha A t e^{\alpha t}$

$y_0''(t) = \alpha A e^{\alpha t} + \alpha A e^{\alpha t} + \alpha^2 A t e^{\alpha t}$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN CON y_0

$(2\alpha A)e^{\alpha t} + \alpha^2 A t e^{\alpha t} + a_1(A e^{\alpha t} + \alpha A t e^{\alpha t}) + a_2 A t e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$.

LUEGO $A(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) = 0$
$A(2\alpha + a_1) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2\alpha + a_1}$

NOTA $2\alpha + a_1 \neq 0$, EN OTRO CASO α ES RAIZ DOBLE

III) SI $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)$ CON $\alpha \neq \alpha_1$ Y $\alpha \neq \alpha_2$

SEA $y_0 = A e^{\alpha t}$, $y_0' = \alpha A e^{\alpha t}$ $y_0''(t) = \alpha^2 A e^{\alpha t}$. ENTRANDO

EN LA ECUACIÓN $A(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$ $A = \frac{1}{\alpha^2 + a_1\alpha + a_2} \neq 0$.