AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

ISOMORFISMOS DE ANILLOS. TEOREMA DE ISOMORFÍA

La noción de **isomorfismo** entre anillos es análoga a la dada para grupos (y en un primer curso para espacios vectoriales).

Definición 1. *Sean* $(\mathbb{A}_1, +, \times)$ *y* $(\mathbb{A}_2, +, \times)$ *dos anillos (observemos que las operaciones de ambos, que denotamos igual, no tienen que ser las mismas). Una aplicación* $T : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ *que verifica que para todo* $a, b \in \mathbb{A}_1$

$$\begin{array}{rcccl} & T(a+b) & = & T(a) & + & T(b) \\ y & & & & & \\ & T(ab) & = & T(a) & \times & T(b) \end{array}$$

se le llama ***homomorfismo*** *de anillos. Si además el homomorfismo es biyectivo decimos que es un* ***isomorfismo****. En este caso, si existe un isomorfismo entre dos anillos decimos que ambos son* ***isomorfos****.*

Como en el caso de Grupos (o espacios vectoriales) tenemos un Teorema de Isomorfía para anillos cuyo enunciado y cuya prueba son análogos a los casos anteriores.

Teorema 1. ***(de Isomorfía de Anillos)*** *Sea* $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un anillo y sea* $I \subset \mathbb{A}$ *un ideal.*

A: *La aplicación*

$$\begin{array}{ccccccc} T & : & (\mathbb{A}, +, \times) & \to & (\mathbb{A}/I, +, \times) & & \\ & & a & \to & T(a) & = & [a] \end{array}$$

es un homomorfismo de anillos suprayectivo.

B: *Dado* $T : (\mathbb{A}_1, +, \times) \to (\mathbb{A}_2, +, \times)$ *un homomorfismo de anillos entonces:*

- *el* ***nucleo*** *de la aplicación*

  $$kerT = \{\ a \in \mathbb{A}_1\ :\ T(a) = 0\ \}$$

  es un ideal del anillo $\mathbb{A}_1$.

- *Si además T es suprayectivo, entonces los anillos* $(\mathbb{A}_1/kerT,+,\times)$ *y* $(\mathbb{A}_2,+,\times)$ *son isomorfos.*

Demostración:

A: Que T está bien definida es una consecuencia de que la relación $\sim_I$ es una congruencia, como sabemos. Y además

$$[a+b]=[a]+[b] \quad \text{y} \qquad [ab]=[a][b] \qquad \text{para todo } a,b\in\mathbb{A}.$$

Luego T es un homomorfismo. Que es suprayectivo es evidente.

B: $(kerT,+)$ es un subgrupo de $(\mathbb{A}_1,+)$, como vimos en el Teorema de Isomorfía para Grupos. Además, si $s\in kerT$ y $a\in\mathbb{A}_1$ se tiene que

$$T(as)=T(a)T(s)=T(a)0=0,$$

luego $as\in kerT$. Lo anterior prueba que $kerT$ es un ideal de $\mathbb{A}_1$, y por tanto $(\mathbb{A}_1/kerT,+,\times)$ es un anillo cociente.

Definimos ahora la aplicación

$$\begin{array}{cccccc} \widehat{T} & : & (\mathbb{A}_1/kerT,+,\times) & \to & (\mathbb{A}_2,+,\times) & \\ & & [r] & \to & \widehat{T}([r]) & = & T(r). \end{array}$$

La aplicación $\widehat{T}$ está bien definida, ya que si $r\sim_{kerT} r'$, entonces $r-r'\in kerT$. Por tanto

$$0=T(r-r')=T(r)+T(-r')=T(r)-T(r') \;\Rightarrow\; T(r)=\widehat{T}([r])=\widehat{T}([r'])=T(r').$$

Que $\widehat{T}$ es un homomorfismo y que además es suprayectivo (T lo es) es un simple ejercicio. Por último veamos que $\widehat{T}$ es inyectivo. Si $\widehat{T}([r])=\widehat{T}([s])$, entonces

$$T(r)=T(s) \qquad \Rightarrow \qquad 0=T(r)-T(s)=T(r-s),$$

luego $r-s\in kerT$ lo cuál es equivalente a que $[r]=[s]$ $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es