AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

CUERPO DE FRACCIONES.

Un anillo cociente construido sobre un ideal maximal tiene estructura de cuerpo, como hemos visto anteriormente.

Hay otra forma de construir un cuerpo a partir de un anillo y que tiene la ventaja de que el cuerpo contiene al anillo como subanillo. Es la construcción llamada **cuerpo de fracciones**. En esencia es la misma que usamos para construir el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ a partir del anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Definición 1. *Dados dos anillos* $(\mathbb{A}_1, +, \times)$ *y* $(\mathbb{A}_2, +, \times)$ *(denotamos igual las operaciones aunque no tienen por que serlo) se define el conjunto producto o* ***suma directa*** *por el producto cartesiano de ambos conjuntos*

$$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \bigoplus \mathbb{A}_2$$

con las operaciones

- ***suma:*** $(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$
- ***producto:*** $(r, s) \times (r', s') = (rr', ss')$.

Observación 1. $(\mathbb{A}_1 \bigoplus \mathbb{A}_2, +, \times)$ *es un anillo. Al cuál le llamaremos* ***anillo producto****.*

Claro, es la misma forma de proceder que la de construir el grupo producto. $(0, 0)$ es el elemento neutro de la suma y $(1, 1)$ él del producto (siempre que los anillos $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ tengan unidad).

CUERPO DE FRACCIONES.

Ejemplo 1. *A partir de* $(\mathbb{Z}, +, \times)$*, un dominio de integridad, se puede construir*

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \ \}$$

dotado de una suma y un producto (la suma y el producto de los quebrados) de modo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo y

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q},$$

siendo $\mathbb{Z}$ un subanillo de $\mathbb{Q}$.

De forma general se puede hacer la siguiente construcción.

Teorema 1. *Sea $(\mathbb{A}_1, +, \times)$ un dominio de integridad. Entonces existe un cuerpo $\mathbb{F}$ con las siguiente propiedades*

- **a:** $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$, *siendo $\mathbb{A}$ un subanillo de $\mathbb{F}$.*
- **b:** *Si $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}'$, siendo $\mathbb{A}$ un subanillo del cuerpo $\mathbb{F}'$, entonces $\mathbb{F} \subsetneqq \mathbb{F}'$ siendo $\mathbb{F}$ un subcuerpo de $\mathbb{F}'$.*

Demostración: Se define el **cuerpo de fracciones** $\mathbb{F}$ por

$$\{ \frac{r}{s} \ : \ r, s \in \mathbb{A}, \ s \neq 0 \ \}$$

con la condición (o relación de equivalencia)

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \qquad \Leftrightarrow \qquad rs' = r's.$$

Sobre $\mathbb{F}$ se definen dos operaciones, para todo $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in \mathbb{F}$

- **suma:** $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$,
- **producto:** $\frac{r}{s} \times \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$. Observemos que $ss' \neq 0$, ya que $\mathbb{A}$ es un dominio de integridad.

Es la misma idea de la construcción de los números racionales. Así, $(\mathbb{F}, +, \times)$ es un cuerpo. Todas las propiedades son fáciles de probar. $\frac{0}{s} = 0$ es el elemento neutro de la suma y $\frac{1}{1} = 1$ es él del producto. Veamos, como ejemplo, la existencia del elemento inverso. Si $\frac{r}{s} \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$, entonces $r \neq 0$, y así $\frac{s}{r}$ es el inverso,

$$\frac{r}{s} \times \frac{s}{r} = \frac{rs}{sr} = \frac{1}{1}$$

(ya que $rs = rs$).

El anillo $\mathbb{A}$ es isomorfo claramente al subanillo de $\mathbb{F}$

$$\{ \ \frac{r}{1} \ : \ r \in \mathbb{A} \ \}.$$

Por eso escribimos $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$.

Cualquier otro cuerpo $\mathbb{F}'$ que contenga a $\mathbb{A}$, tienen que contener a los inversos de los elementos de $\mathbb{A}$, como $\frac{r}{s}$ es el inverso de $\frac{s}{r}$ y diceversa, se tiene que necesariamente $\mathbb{F} \subsetneqq \mathbb{F}'$ $\square$

Definición 2. *Sea* $(\mathbb{A}, +, \times)$ *un dominio de integridad tal que* $\mathbb{A} \subset \mathbb{F}$*, donde* $\mathbb{F}$ *es el cuerpo definido en el teorema anterior. Al cuerpo* $\mathbb{F}$ *se le llama* ***cuerpo de las fracciones*** *de* $\mathbb{A}$.

Teorema 2. *Si* $T : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ *es un isomorfismo entre dos dominios de integridad, entonces existe una extensión de* T *entre los respectivos cuerpos de fracciones* $\widetilde{T} : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ *que es a su vez otro isomorfismo.*

Demostración: Definimos la aplicación $\widetilde{T}$ por

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{T} & : & \mathbb{F}_1 & \to & \mathbb{F}_2 & & \\ & & \frac{r}{s} & \to & \widetilde{T}(\frac{r}{s}) & = & \left(\frac{T(r)}{T(s)}\right). \end{array}$$

Como T es un isomorfismo, $T(s) = 0$ si y solo si $s = 0$. Por tanto $\widetilde{T}$ está bien definida. Ver ahora que la aplicación $\widetilde{T}$ es un isomorfismo es un simple ejercicio $\square$

Corolario 1. *Dos cuerpos de fracciones de un mismo dominio de integridad son ambos isomorfos.*

Demostración: Sea $I : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, la identidad de un dominio de integridad en si mismo. I es un isomorfismo y podemos aplicar el teorema anterior $\square$

Ejemplos 1.

- $\mathbb{Q}$ *es el único cuerpo de fracciones para el anillo de los enteros* $\mathbb{Z}$.
- *Sea* $\mathbb{F}$ *un cuerpo, y sea* $\mathbb{F}[x]$ *el dominio de integridad de los polinomios con coeficientes en* $\mathbb{F}$*. Denotamos por* $\mathbb{F}(x)$ *el cuerpo de fracciones asociado.*
- *En* $\mathbb{Q}(x)$ *se puede encontrar el inverso de un polinomiode* $\mathbb{Q}[x]$*. Así por ejemplo*

  $$x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]; \qquad \textit{existe } (x^2+1)^{-1} \in \mathbb{Q}(x)$$

  que es precisamente $\frac{1}{x^2+1}$.

Observación 2. $\mathbb{Q}(x)$ *es el conjunto de las* ***funciones racionales*** *con coeficientes en* $\mathbb{Q}$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es