ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Curvas Paramétricas. Dada una curva paramétrica

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & \gamma(t) \quad = \quad (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas y derivables en $t \in [a,b]$ para $k = 1,2,..,n$. Llamamos **derivada** de γ a la función paramétrica

$$\gamma'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t)) \quad \text{para} \quad t \in [a,b].$$

Ya hemos visto que el vector $\gamma'(t_0)$ es el **vector director** de la recta tangente a la curva paramétrica por el punto $\gamma(t_0)$. Así la recta tangente se escribe como

$$R(t) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + \gamma(t_0).$$

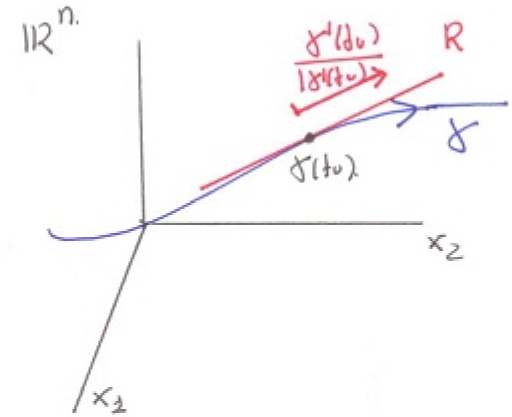

Figura 1. Recta tangente a la curva γ.

Además comprobamos que la recta tangente por un punto $\gamma(t_0)$ es la recta que mejor aproxima a la curva en el punto, es decir

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - f_1'(t_0), ..., \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} - f_n'(t_0)\right) = \overrightarrow{0}$$

Observación. 1. *En Física, una curva paramétrica γ se ve como la trayectoria de un móvil. Así se considera que el móvil sobre el punto $\gamma(t)$ de la curva lleva un dirección de movimiento igual a $\gamma'(t)$.*

La derivada de una curva tiene otras aplicaciones. Por ejemplo, cuando veamos integración veremos la relación entra la **longitud de una curva** y su derivada.

Potenciales. Derivadas Parciales.

Vamos a considerar una función real de varias variables reales,

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \rightarrow & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

Ejemplo. 1.
- $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i$ *(función de n variables)*
- $f(x,y) = xy\cos(x+2y)$ *(función de dos variables).*
- $f(x,y,z) = xz - yx + zy$ *(función de tres variables).*

Un ejemplo importante y que nos va a servir para ciertas notaciones es el **Producto Escalar.**

Ejemplo. 2. *Sea $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define el **producto escalar** de $\overrightarrow{a}$ por $\overrightarrow{x}$ como*

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} >= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Así fijado $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\overrightarrow{x}) =< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} >$ es una aplicación de n variables.

Ejemplos concretos son

- $f(x,y) = 2x - 3y =< (2,-3), (x,y) >$.
- $f(x,y,z) = 2x - y + z =< (2,-1,1), (x,y,z) >$.

Observación. 2. *En $\mathbb{R}^n$*

a: $\sqrt{< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *es la **distancia** que separa el punto $\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{0}$.*

b: $\sqrt{< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ *es la **distancia** que separa el punto $\overrightarrow{x}$ del punto $\overrightarrow{y}$.*

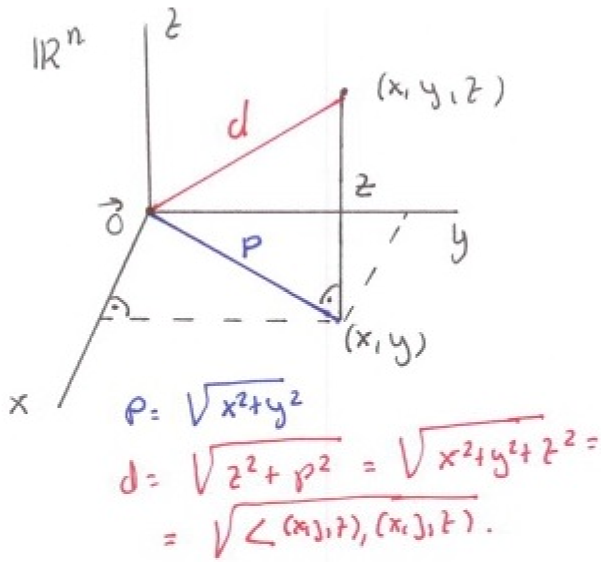

FIGURA 2. Distancia en $\mathbb{R}^n$.

Si en una función f de n variables nos fijamos en una x_{i_0} y consideramos las demás (x_i, con $i \neq i_0$) como constantes, podemos hacer la derivación formal respecto de la variable que hemos elegido. Esto es lo que llamamos una **derivada parcial,** y lo escribimos como $\frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}$.

Ejemplo. 3.
- *Sea* $f(x,y) = xy\cos(x+2y)$, *entonces*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x+2y) - xy\,\mathrm{sen}(x+2y)$.
  - $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x+2y) - 2xy\,\mathrm{sen}(x+2y)$.
- *Sea* $f(x,y,z) = 2x - y + z$, *entonces*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$.
  - $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$.
  - $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

Formalmente

Definición. 1. *Sea una función de n variables*

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

y sea $\overrightarrow{a} \in Domf$.

a: *Se llama* ***derivada parcial*** *de f con respecto a la variable x_i en el punto $\overrightarrow{a}$, al siguiente límite, siempre que exista,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,..,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},..,a_n) - f(\overrightarrow{a})}{h}.$$

b: *El vector de derivadas parciales*

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}), .., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}))$$

se le llama ***gradiente*** *de la función f en el punto $\overrightarrow{a}$.*

Ejemplo. 4.

- *Sea $f(x,y) = xy\cos(x+2y)$, entonces*

$$\nabla f(x,y) = (y\cos(x+2y) - xy\,\text{sen}(x+2y), x\cos(x+2y) - 2xy\,\text{sen}(x+2y)).$$

- *Sea $f(x,y,z) = 2x - y + z$, entonces*

$$\nabla f(x,y,z) = (2, -1, 1),$$

El gradiente de una función tiene interesantes propiedades. Viene a ser como la derivada de una función en una variable. Se puede probar que:

- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - (< \nabla f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} > + f(\overrightarrow{a}))}{\sqrt{< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} >}} = 0.$$

  Es decir la función **lineal** $r(\overrightarrow{x}) =< \nabla f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} > + f(\overrightarrow{a})$ aproxima a la función f cerca del punto $\overrightarrow{a}$ (para que lo anterior sea cierto hay que pedir no solo que las derivadas parciales existan sino que además sean continuas).
- Los puntos donde el gradiente se anula, $\nabla f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, son candidatos a máximos y mínimos locales de la función f.
- El gradiente es un vector de $\mathbb{R}^n$. Se puede probar que la dirección que indica el vector gradiente en un punto es la dirección de máxima variación de la función en el punto.

Ejemplo. 5. *Supongamos que la función $f(x,y,z)$ indica la temperatura del punto del espacio (x,y,z). Entonces $\nabla f(x,y,z)$ indica la dirección en la que fluye el calor en el punto (x,y,z), dado que indica la dirección en que las temperaturas varian más rapidamente.*

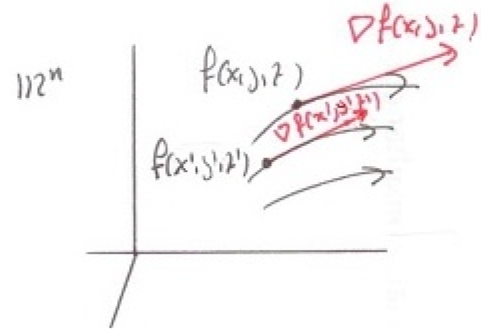

Figura 3. Flujo.

Funciones Vectoriales.

Consideremos funciones de varias variables que toman valores vectoriales, es decir funciones

$$\begin{array}{rcccl} F : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & \\ & \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = \overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_m). \end{array}$$

Si llamos $f_j(\overrightarrow{x}) = y_j$ (función real de n variables) para $j = 1, 2, .., m$, entonces podemos escribir

$$F(\overrightarrow{x}) = (\, f_1(\overrightarrow{x}), f_2(\overrightarrow{x}), ..., f_m(\overrightarrow{x})\,).$$

Ejemplo. 6.

- $F(x, y) = (xy, \cos x, \operatorname{sen} y)$ *es una función definida en* $\mathbb{R}^2$ *que toma valores en* $\mathbb{R}^3$.
- *Si* $f(x, y, z) = xyz$, *entonces* $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ *es una función de* $\mathbb{R}^3$ *en si mismo. Si* f *es una función real de* n *varaibles entonces el gradiente de la función* ∇f *es una función vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *en si mismo.*
- $F(x, y, z) = (7-x, \ln y, x+y+z)$. *En este caso* $F = (f_1, f_2, f_3))$ *donde* $f_1(x, y, z) = 7 - x$, $f_2(x, y, z) = \ln y$, *y* $f_3(x, y, z) = x + y + z$.

Definición. 2. *Dada una función vectorial de* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *con* $F = (f_1, ..., f_m)$ *se llama* ***matriz diferencial*** *de* F *a la matriz de derivadas parciales* $DF \in M_{m\times n}$, *si existen,*

$$DF = (\frac{\partial f_j}{\partial x_i})_{\substack{j \;=\; 1,2,...,m \\ i \;=\; 1,2,...,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. 7. *Sea* $F(x,y,z) = (7-x, \ln y, x+y+z)$*. La diferencial de* F *es*

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como en el caso de las funciones escalares, la **diferencial** permite encontrar una función lineal que aproxima la función de forma local. De forma precisa, se puede probar que:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{F(\overrightarrow{x}) - (\, DF(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) + F(\overrightarrow{a}))}{\sqrt{< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} >}} = 0.$$

Es decir la función **lineal** $r(\overrightarrow{x}) = DF(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) + F(\overrightarrow{a})$ aproxima a la función F cerca del punto $\overrightarrow{a}$ (para que lo anterior sea cierto hay que pedir no solo que las derivadas parciales existan sino que además sean continuas).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es