ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

TANGENTES A CURVAS PARAMÉTRICAS.

La forma más general de representar un curva en el plano no es a través de una gráfica sino de una curva paramétrica (ver Apéndice al tema de Continuidad). Sea una curva paramétrica plana

$$\begin{array}{rcccccl} f & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & & t & \to & f(t) & = & (f_1(t), f_2(t)) \end{array}$$

donde las funciones $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones reales de una variable real **derivables**. Si procedemos geométricamente, como hicimos a la hora de justificar la derivada de una función, tomando $f(t_0)$ y $f(t)$ dos puntos sobre la curva paramétrica y trazando la recta que los une, tendremos la recta

$$r(x) = \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{f_1(t) - f_1(t_0)}(x - f_1(t_0)) + f_2(t_0).$$

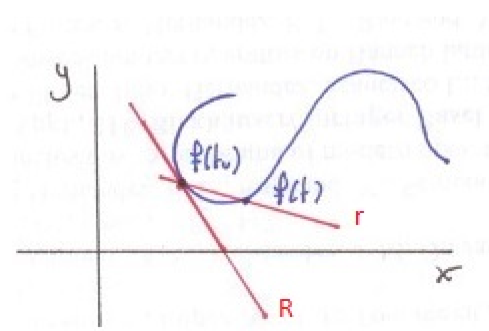

Figura 1. Cuerda entre dos puntos de una curva paramétrica plana.

Si cálculamos el límite de estas pendiente cuando t tiende a t_0

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{f_1(t) - f_1(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} \frac{t - t_0}{f_1(t) - f_1(t_0)}$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}}{\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}}$$

como f_1 y f_2 son derivables y si además $f_1'(t_0) \neq 0$, entonces

$$= \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0).}$$

Alcanzado este límite, podemos definir la recta tangente como

$$R(x) = \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0)}(x - f_1(t_0)) + f_2(t_0).$$

Observación. 1.

- *Hemos obtenido la recta tangente R, de forma análoga a como lo hicinos para gráficas.*
- *La recta R no viene dada por unas ecuaciones paramétricas, pero observemos que el vector*

  $$f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0))$$

  es un vector director de la recta tangente. Y así la recta R admite una parametrización

  $$\begin{array}{rcl} x &=& (t - t_0)f_1'(t_0) + f_1(t_0) \\ y &=& (t - t_0)f_2'(t_0) + f_2(t_0) \end{array}$$

  para $t \in \mathbb{R}$.

Como en el caso de gráficas, podemos probar (ver el siguiente Teorema) que la recta tangente es la recta que mejor aproxima a la curva en el punto correspondiente. Esta propiedad es la que nos permite dar una definición general de recta tangente para una curva paramétrica.

Definición. 1. *Sea una curva paramétrica*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $k = 1, 2, .., n$. Una recta $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se llama recta tangente a la curva f por el punto $f(t_0)$ si

- *$f(t_0) = r(t_0)$ (pasa por el punto $f(t_0)$ para el mismo valor del parámetro) y*
- $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - r(t)}{t - t_0} = \overrightarrow{0}.$

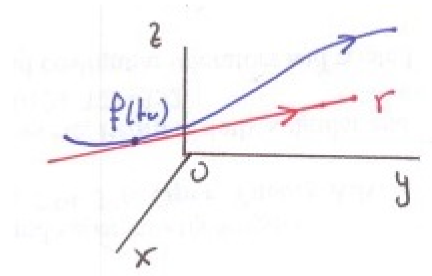

FIGURA 2. Trayectoria en $\mathbb{R}^3$ y su recta tangente por el punto $f(t_0)$.

Teorema. 1. *Sea una curva paramétrica*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n & & \\ & & t & \rightarrow & f(t) & = & (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \end{array}$$

donde las funciones $f_k : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *son continuas y derivables en* $t_0 \in [a,b]$ *para* $k = 1, 2, .., n$. *Entonces la recta paramétrica*

$$R(t) = f(t_0) + (t - t_0)(f_1'(t_0), f_2'(t_0), ..., f_n'(t_0)) \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}$$

es tangente a la curva por el punto $f(t_0)$.

Demostración: Claramente $R(t_0) = f(t_0)$. Por otro lado

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - R(t)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - f_1'(t_0), ..., \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} - f_n'(t_0)\right)$$

y como las funciones f_k son derivables en t_0

$$= (0, 0, ..., 0)$$

□

Ejemplo. 1. *Sea la parametrización sobre el plano*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & : & [0,2\pi]\subset\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & & \theta & \rightarrow & \gamma(\theta) & = & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta). \end{array}$$

Demostración: γ es la parametrización de la circunferencia unidad y el vector director de la recta tangenta es $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

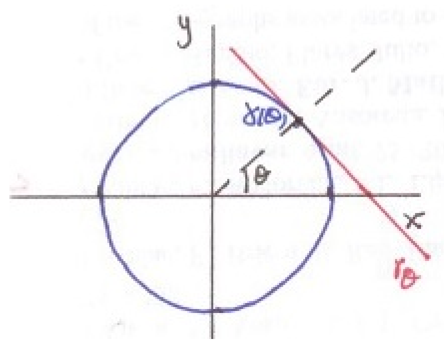

Figura 3. Parametrización de la circunferencia unidad.

Obsevemos que

- $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, lo que prueba que los puntos $\gamma(\theta)$ están sobre la circunferencia unidad (ver Apéndice sobre Trigonometría).
- Por otro lado, el productos escalar
$$\gamma(\theta)\gamma'(\theta) = \cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0,$$
esto último prueba que el radio de la circunferencia por un punto es ortogonal a la tangente por el mismo punto.

□

Tangentes horizontales y verticales en curvas planas. Al representar curvas paramétricas planas (en $\mathbb{R}^2$), son intereseantes encontar las tangentes horizontales y verticales de la curva, si existen.

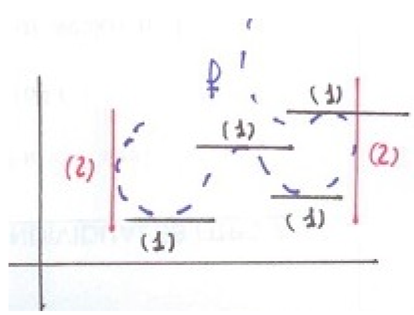

Figura 4. Tangentes horizontales y verticales.

Definición. 2. *Sea una curva paramétrica plana*
$$\begin{array}{rcccl} f & : & [a,b]\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \to & f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \end{array}$$
*donde las funciones $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones reales de una variable real **derivables**. Se dice que:*

- *una tangente a la curva por el punto $f(t_0)$ es **horizontal**, si es paralela al eje de las "x", es decir paralela a la recta $y = 0$, lo que es lo mismo que decir que $f'(t_0) = (f_1'(t_0), 0)$ con $f_1'(t_0) \neq 0$ ((1) en la figura anterior);*
- *una tangente a la curva por el punto $f(t_0)$ es **vertical**, si es paralela al eje de las "y", es decir paralela a la recta $x = 0$, lo que es lo mismo que decir que $f'(t_0) = (0, f_2'(t_0))$ con $f_2'(t_0) \neq 0$ ((2) en la figura anterior).*

En nuestro ejemplo anterior de la parametrización de la circunferencia,

- $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, 0)$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, en estos puntos encontramos tangentes horizontales.
- $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0, \cos\theta)$ si $\theta = 0$ o π, en estos puntos encontramos tangentes verticales.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es