ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

REPRESENTACIÓN DE CURVAS PARAMÉTRICAS.

En el Apéndice al Tema de Continuidad hemos definidos las curvas paramétricas y hemos visto como dibujarlas. Para ello hay que representar primeros una serie de funciones de una variable. Ahora que disponemos de la derivada y hemos visto en el artículo anterior lo que son las tangentes a una curva paramétrica, en particular las tangentes horizontales y verticales, estamos en mejores condiciones para hacer tales dibujos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *Vamos a representar la curva paramétrica dada por la función* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Demostración: Las funciones f y g, como funciones de una variable, ya las hemos representados (ver artículo Representación de Gráficas en este mismo Tema). Con esta información tenemos que representar $\gamma = (f, g)$ en el plano.
Dominio y límites. Como Dom$f$ = Dom$g = \mathbb{R}$, el parámetro t de la función γ se mueve en todo $\mathbb{R}$. Si nos fijamos en el comportamiento del crecimiento de la funciones f y g el dominio de γ queda dividio de la siguiente manera:

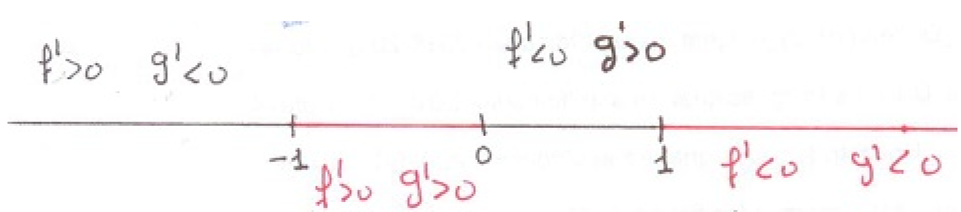

FIGURA 1. Dominio de γ.

Tomando límites en los extremos del dominio (usamos que $\lim \gamma = (\lim f, \lim g)$),

- $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = (\lim_{t\to\infty} f(t), \lim_{t\to\infty} g(t)) = (-1, 0)$.

- $\lim_{t\to-\infty}\gamma(t) = (\lim_{t\to\infty} f(t), \lim_{t\to\infty} g(t)) = (-1,0)$.

Luego el comportamiento de la curva es

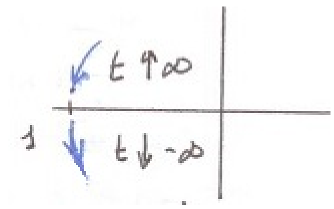

FIGURA 2. $(-1,0)$ punto límite.

El dibujo queda de esa manera ya que $-1 < f(t) \leq 1$ y $-1 \leq g(t) \leq 1$, para todo t.

Por otro lado, los valores $\gamma(-1) = (0,-1), \gamma(0) = (1,0)$ y $\gamma(1) = (0,1)$ son significativos de la curva ya que en ellos varía el comportamiento de crecimiento de las coordenadas f y g. Por otro lado, f y g son continuas, por tanto la curva γ también, y así la curva debe unir estos puntos significativos de forma continua.

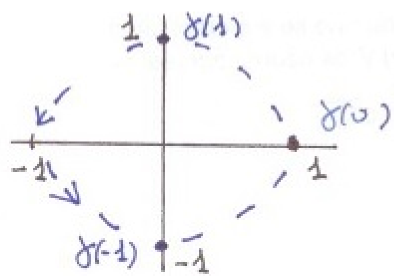

FIGURA 3. Boceto de la curva.

Derivadas. Ponemos $\gamma'(t) = (f'(t), g'(t))$ (vector director de la recta tangente, ver apéndice anterior), así

$$\gamma'(t) = (\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}.)$$

Tangentes horizontales. Si $f'(t) \neq 0$ y $g'(t) = 0$, necesariamente $t = \pm 1$. Tenemos dos tangentes horizontales.

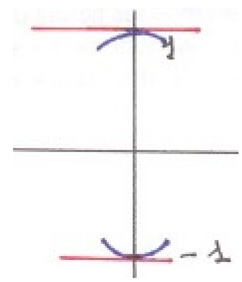

FIGURA 4. Tangentes horizontales en los puntos $\gamma(-1)$ y $\gamma(1)$.

Tangentes verticales. Si $f'(t) = 0$ y $g'(t) \neq 0$, necesariamente $t = 0$. Además observemos que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{g'(t)}{f'(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2-2t^2}{-4t} = \pm\infty.$$

Así tenemos dos tangentes verticales.

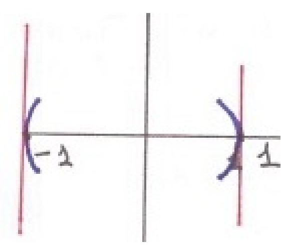

FIGURA 5. Tangentes verticales en los puntos $\gamma(0)$ y en el punto límite $(-1, 0)$.

En cada $\gamma(t)$, la pendiente de la recta tangente en tal punto viene dada por $\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{2-2t^2}{-4t}$, estudiando el crecimiento de esta función descubrimos donde la curva γ es concava o convexa (no lo hacemos).

Con toda esta información es fácil convencerse de que estamos antes la circunferencia de centro cero y radio 1.

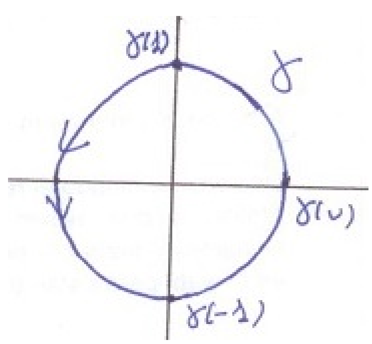

FIGURA 6. Curva paramétrica γ, la circunferencia unidad.

$\square$

Observación. 1. $f^2(t)+g^2(f)=(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+(\frac{2t}{1+t^2})^2=1.$

Hemos visto un ejemplo muy básico (una parametrización particular de la circunferencia, hay algunas más). Para representar otras curvas paramétricas las herramientas de las que disponemos son en esencia las que hemos visto. Aunque es posible que la complejidad de otros ejemplos hace que tengamos que emplearlas con más finura.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`