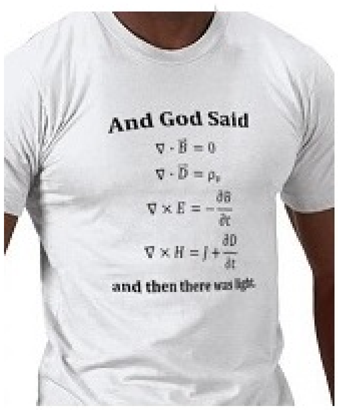
ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OTRAS INTEGRALES.

Como pasa con la derivada, las integrales más interesantes se corresponden a funciones de varias variables. Algunas fórmulas tan populares como las **ecuaciones de Maxwell** vienen dadas por el símbolo integral "($\int$)" que nos es familiar, pero con un significado que se nos escapa. Para entenderlo necesitamos de un curso de Cálculo Diferencial e Integral Superior. Esto queda fuera de nuestras pretensiones, pero si queremos indicar como la integral de Riemann para funciones de una variable está detrás de estas otras integrales.



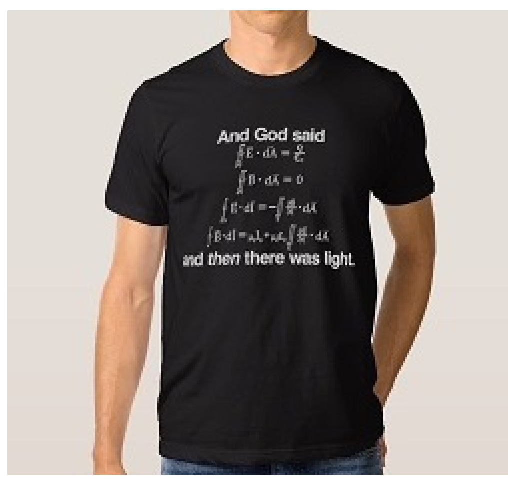


FIGURA 1. Ecuaciones de Maxwell: forma diferencial e integral.

Integrales de funciones de varias variables. Como dijimos en la Introducción de esta Tema, se puede construir la integral de Riemann para funciones de dos, tres y más variables. Lo cuál permite calcular, entre otras cosas, volúmenes. Pero también las integrales de línea y superficie que veremos más abajo.

Sea una función de varias variables

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

acotada. De forma similar a como hemos construido la integral de Riemann se puede construir la integral de Riemann para funciones de varias variables

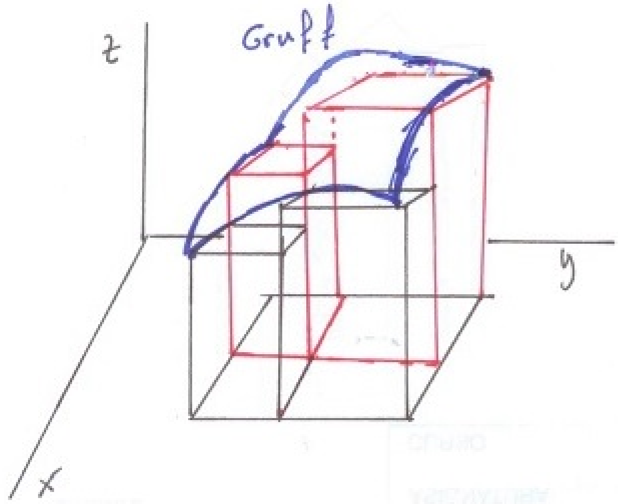


FIGURA 2. Suma inferior de Riemann para una función de dos variables.

Con un poco de trabajo veríamos que

$$\int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]} f(x_1,..,x_n)dx_1..dx_n$$

$$=\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left(\ldots.\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,..,x_n)dx_1\right)\ldots\right)dx_{n-1}\right)dx_n.$$

Es decir, para calcular la integral de una función de n variables tenemos que hacer n integrales de funciones de una variable. Veamos un ejemplo para comprender lo anterior.

Ejemplo. 1. *Consideramos la función de dos variables $f(x,y)=x+y$ para $(x,y)\in[0,1]\times[1,2]$, entonces tendríamos que*

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} x+ydxdy=\int_1^2(\int_0^1 x+ydx)dy$$

$$=\int_1^2(\frac{x^2}{2}+yx|_0^1)dy=\int_1^2\frac{1}{2}+ydy$$

$$=(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}|_1^2=2$$

Hemos integrado primero sobre la variable "x", tomando la "y" como constante. Después hemos integrado respecto de "y".

Integrales de línea. La ley de Faraday-Henry, la tercera de las leyes de Maxwell, se escribe de forma integral como

$$\oint_L \overrightarrow{E} dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \overrightarrow{B} dS.$$

Independientemente de lo que sean $\overrightarrow{E}$ (campo eléctrico) y $\overrightarrow{B}$ (campo magnético) y el significado físico de la fórmula, vemos que la primera integral es una integral de linea y la segunda es una integral de superficie.

Definición. 1. *Sea $L : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica. Y sea $\overrightarrow{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Se define la **integral de línea** del campo a lo largo de la curva L por*

$$\int_L \overrightarrow{E} dl = \int_a^b \overrightarrow{E}(L(t)) \cdot L'(t) dt.$$

Al multiplicar escalarmente $\overrightarrow{E}(L(t))$ por $L'(t)$ nos queda una función de una variable $\overrightarrow{E}(L(t)) \cdot L'(t)$, de la cuál calculamos su integral de Riemann.

Nos quedamos con la definición formal como conexión entre la integral de línea y la de Riemann (la que conocemos). Un estudio más detallado nos daría el sentido de esta definición.

El símbolo "$\oint$" indica además que la curva es cerrada (el final se une con el inicio).

Integrales de superficie. La definición de la integral de superficie $\int_S \overrightarrow{B} dS$, nos llevaría primero a definir lo que es una superficie paramétrica (algo análogo a las curvas paramétricas, pero para dimensión dos) y a conectar la integral de superficie con una integral de Riemann para funciones de dos variables.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es