ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONJUNTOS ESPECIALES DE LA RECTA REAL. TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}$.

Dado un intervalo abierto de la recta real (a, b) y dado $x \in (a, b)$, es decir $a < x < b$, podemos encontrar $r > 0$ de modo que

$$(x - r, x + r) \subset (a, b).$$

Claro, es suficiente con tomar $r = \min\{x - a, b - x\} > 0$, y entonces para todo $y \in (x - r, x + r)$ se tiene que

$$a < x - r < y < x + r < b$$

y por tanto $y \in (a, b)$.

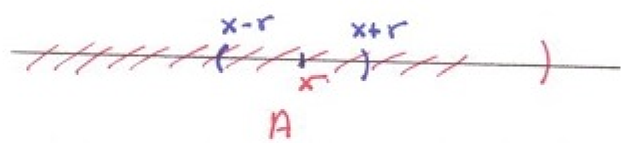

Figura 1. Conjunto abierto.

Ahora nos fijamos en la propiedad anterior y en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen esa propiedad.

Definición. 1. **a:** *Un subconjunto de la recta real, $A \subset \mathbb{R}$, se llama* ***conjunto abierto*** *si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ de modo que*

$$(x - r, x + r) \subset A.$$

b: *Un subconjunto de la recta, $C \subset \mathbb{R}$, se llama* ***conjunto cerrado*** *si el conjunto*

$$\mathbb{R} \backslash C = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \notin C \}$$

es abierto.

Ejemplos. 1.

- *Todo intervalo abierto, (a, b), es un conjunto abierto.*

- *Las semirectas abiertas,* $(-\infty, b)$ *o* (a, ∞), *son ejemplos de conjuntos abiertos.*
- $(a, b)\bigcup(c, d)$ *o* $(a, b)\bigcap(c, d)$ *son conjuntos abiertos.*
- *Todo intervalo cerrado,* $[a, b]$, *es un conjunto cerrado.*
- *Las semirectas cerradas,* $(-\infty, b]$ *o* $[a, \infty)$, *son ejemplos de conjuntos cerrados.*
- $[a; b]\bigcup[c, d]$ *o* $[a, b]\bigcap[c, d]$ *son conjuntos cerrados.*

Demostración: Veamos que $[a, b]$ es un conjunto cerrado. Para ello solo hace falta ver que

$$\mathbb{R}\backslash[a, b] = (-\infty, a)\bigcup(b, \infty)$$

es abierto, lo cuál es claro (ver Proposición siguiente) $\square$

Observación. 1. *Si* A *es un conjunto abierto, entonces* $\mathbb{R}\backslash A$ *es un conjunto cerrado. Y por tanto un conjunto* C *es cerrado si y solo si para todo* $x \notin C$ *existe* $r > 0$ *de modo que* $(x - r, x + r)\bigcap C = \emptyset$.

FIGURA 2. Conjunto cerrado.

Proposición. 1. **a:** $\mathbb{R}$ *y* $\emptyset$ *son conjuntos abiertos.*

B: *Si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *es una familia de abiertos, entonces*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; \textit{existe } j \in I \textit{ con } x \in I_j \,\}$$

es un conjunto abierto.

c: *Si* A *y* B *son cojuntos abiertos, entonces* $A\bigcap B$ *es un conjunto abierto.*

Demostración: Es bastante sencillo de probar. Ejercicio. $\square$

Proposición. 2. **a:** $\mathbb{R}$ *y* $\emptyset$ *son conjuntos cerrados.*

B: *Si* $\{C_i\}_{i\in I}$ *es una familia de cerrados, entonces*

$$\bigcap_{i\in I} C_i = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; \textit{para todo } j \in I \textit{ se tiene } x \in I_j \,\}$$

es un conjunto cerrado.

c: *Si A y B son cojuntos cerrados, entonces $A\bigcup B$ es un conjunto cerrado.*

Demostración: Es bastante sencillo de probar. Ejercicio. $\square$

Observación. 2. *En general, dado un conjunto X y una familia de subconjuntos del conjunto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, se dice que esta familia forma una* ***Topología*** *sobre X si se verifican las tres propiedades de la Proposición* **??** *(sustituyendo $\mathbb{R}$ por X).*

La noción de Topología da nombre a todo un área de estudio de las Matemáticas. A nosotros aquí solo nos va a interesar conocer los conjuntos abiertos y cerrados.

Definición. 2. **a:** *Un conjunto de la recta real $B\subset\mathbb{R}$ se dice* ***acotado*** *si existe $M>0$ de modo que $|x|<M$ para todo $x\in B$.*

b: *Un conjunto de la recta $K\subset\mathbb{R}$ se llama* ***compacto*** *si es a la vez cerrado y acotado.*

Ejemplos. 2.

- *La sucesión de números reales $(\dfrac{n(-1)^n}{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ está acotada y por tanto es un conjunto acotado ($|\dfrac{n(-1)^n}{2n+1}|<1$, para todo natural n).*
- *$\{\,x^2\in\mathbb{R}\ :\ x>1\,\}$ claramente es un conjunto no acotado.*
- *Los intervalos cerrados y acotados, $[a,b]$, son los ejemplos típicos de conjuntos compactos, pero no solo estos.*
- *$[a,b]\bigcup[c,d]$ es un conjunto compacto.*

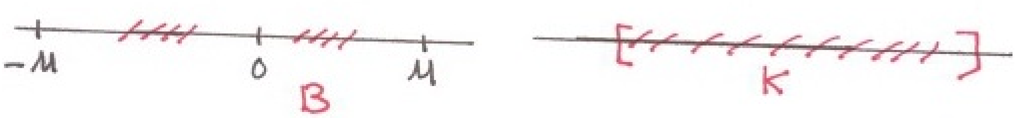

FIGURA 3. Conjunto acotado. Conjunto compacto.

Los conjuntos **compactos** som importantísimos en Análisis Mátemático. Lo veremos, aunque solo sea tangencialmente, cuando estudiemos máximos y mínimos de funciones continuas.

Puntos en relación a un conjunto.

Dado un punto sobre la recta, $x\in\mathbb{R}$, y un subconjunto de la recta, $A\subset\mathbb{R}$, lo primero que podemos ver es si x pertenece a A o no. Las siguientes definiciones nos dirán si un punto pertenece "mucho", "poco" o "nada " a un conjunto.

Definición. 3. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y A un subconjunto de la recta, $A \subset \mathbb{R}$.*

- *Se dice que x es un **punto interior** de A, si existe $r > 0$ de modo que $(x - r, x + r) \subset A$.*
- *Se dice que x es un **punto adherente** de A, si para todo $r > 0$ se tiene que $(x - r, x + r) \bigcap A \neq \emptyset$.*
- *Se dice que x es un **punto de la frontera** de A si es adherente, pero no interior.*
- *Se dice que x es un **punto de acumulación** de A si x es adherente a $A \backslash \{x\}$.*

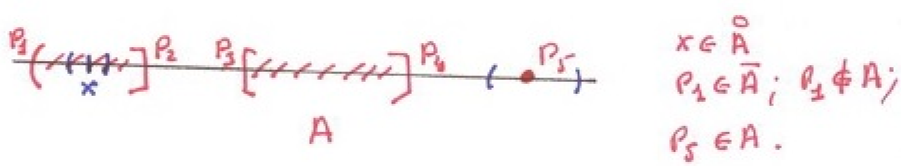

FIGURA 4. Punto interior, adherente y frontera.

Observación. 3.
- *Si x es un punto interior de A, entonces $x \in A$.*
- *Si $x \in A$, entonces x es un punto adherente de A.*
- *Los puntos frontera de un conjunto pueden o no pertenecer al conjunto.*

Definición. 4. *Dado un subsonjunto A de $\mathbb{R}$,*

- *se llama conjunto **interior** de A al conjunto*
$$\mathring{A} = \{\, x \in A \;:\; x \text{ es un punto interior de } A \,\};$$
- *se llama conjunto **adherente** de A al conjunto*
$$\overline{A} = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x \text{ es un punto adherente de } A \,\};$$
- *se llama conjunto **frontera** de A al conjunto*
$$\partial A = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x \text{ es un punto frontera de } A \,\};$$

Proposición. 3. *Dado un subsonjunto A de $\mathbb{R}$,*

- *A es un conjunto abierto si y solo si $A = \mathring{A}$;*
- *A es un conjunto cerrado si y solo si $A = \overline{A}$;*

- $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

Demostración: Solo hay que tener en cuenta las definiciones de los términos que aparecen en el enunciado. Se deja como ejercicio. $\square$

Ejemplo. 1. *Sea* $A = (-3,2] \bigcup [4,6] \bigcup \{7\}$, *entonces parece claro que*

- $\mathring{A} = (-3,2) \bigcup (4,6)$.
- $\overline{A} = [-3,2] \bigcup [4,6] \bigcup \{7\}$.
- $\partial A = \{-3,2,4,6,7\}$
- -3 *y* 2 *son puntos de acumulación de* A, *que no son puntos interiores.* 7 *es un punto adherente de* A, *que no es punto interior ni tampoco punto de acumulación.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`