ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES.

Queremos presentar una de las construcción típicas de los números reales a partir de los racionales. Lo que veremos es algo muy elaborado, a veces engorroso y en muchos casos tedioso, que no aporta nada al manejo y uso de los números reales. Pero nos da seguridad de su existencia. Solo veremos los pasos esenciales de la construcción sin mayores detalles.

Cortaduras de Dedekind

Definición. 1. *Llamamos número real α a todo subconjunto de $\mathbb{Q}$, $\alpha \subset \mathbb{Q}$, de modo que verifica que:*

1. $\alpha \neq \emptyset$ *y* $\alpha \neq \mathbb{R}$.
2. *Si* $a \in \alpha$ *y* $b \in \mathbb{Q}$ *verificando que* $b < a$*, entonces* $b \in \alpha$.
3. *Para todo* $a \in \alpha$*, existe otro* $a' \in \alpha$ *de modo que* $a < a'$.

Al conjunto de todos estos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ lo denotamos por $\mathbb{R}$.

A este tipo de conjuntos de $\mathbb{Q}$ se les conoce con el nombre de **cortaduras de Dedekind.** Lo que hacemos es cortar la recta de números y quedarnos con todos los números racionales a su izquierda.

FIGURA 1. Cortadura de Dedekind.

Es chocante que un número lo presentemos como un conjunto de números, pero gráficamente es muy intuitivo que el corte sobre la recta nos da un número real.

Ejemplo. 1. *Sea* $\{\, x \in \mathbb{Q} \ : \ x < 0 \text{ o } x^2 < 2 \,\}$. *No es difícil probar que este conjunto está en $\mathbb{R}$ (verifica las propiedades $1, 2$ y 3). Efectivamente es el número real $\sqrt{2}$.*

Observación. 1. *Es fácil ver que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*. Sea* $r \in \mathbb{Q}$ *y sea* $\rho = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\} \in \mathbb{R}$*. La identificación de* r *con* ρ *nos permite ver la inclusión de los racionales dentro de los reales.*

Definición. 2. *Dados* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *decimos que* $\alpha < \beta$ *si* $\alpha \subset \beta$*.*

Es fácil ver que esta definición da un orden total sobre $\mathbb{R}$.

Teorema. 1. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *acotado superiormente, entonces existe* $\sup A$.

Demostración: Se define

$$\sup A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha.$$

Ahora se ve que $\sup A$, así definido, es un elemento de $\mathbb{R}$ y que verifica las condiciones para ser supremo $\square$

Definición. 3. *Para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *se define su suma por*

$$\alpha + \beta = \{x + y \in \mathbb{Q} \ : \ x \in \alpha \ \textit{e} \ y \in \beta\}$$

Tendríamos que ver que $\alpha + \beta$, así definido, es un número real y que esta operación verifica las propidades de la suma. Donde

- $0 = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x < 0\}$, es el elemento neutro.
- $-\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ -x \notin \alpha \text{ y } -x \neq \min \mathbb{Q} \backslash \alpha\}$, es el elemento opuesto a α.

Definición. 4. *Dados* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, números reales positivos,* $\alpha, \beta > 0$*, se define el producto de estos números por*

$$\alpha \times \beta = \alpha\beta = \{z \in \mathbb{Q} \ : \ z < 0 \ \textit{o} \ z = xy \ \textit{con} \ x \in \alpha, \ y \in \beta \ \textit{e} \ y, x > 0\}$$

Tendríamos que ver que $\alpha\beta$, así definido, es un número real. A partir de esta definición damos la definición general de producto de números reales.

Definición. 5. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

a: *Se define el valor absoluto de un número real por*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \textit{si} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \textit{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

b: *Se define el producto de números reales por:*

$$\alpha \times \beta = \alpha\beta = \begin{cases} 0, & \textit{si} \quad \alpha = 0 \quad \textit{o} \quad \beta = 0 \\ |\alpha||\beta|, & \textit{si} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad \textit{o} \quad \alpha < 0, \beta < 0 \\ -|\alpha||\beta|, & \textit{si} \quad \alpha > 0, \beta < 0 \quad \textit{o} \quad \alpha < 0, \beta > 0 \end{cases}$$

La definición anterior nos da números reales, y solo queda ver que este producto verifica las propiedades del producto de números reales donde

- $1 = \{ x \in \mathbb{Q} \ : \ x < 1 \}$, es elemento neutro del producto.
- $\alpha^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x \leq 0 \text{ o } x > 0, \frac{1}{x} \notin \alpha \text{ y } \frac{1}{x} \notin \text{mín}\, \mathbb{Q} \backslash \alpha \}$, si $\alpha > 0$. En otro caso, si $\alpha < 0$, se define $\alpha^{-1} = -(|\alpha|^{-1})$. El elemento inverso de un número real $\alpha \neq 0$.

Solo nos quedaría ver la propiedad distributiva y también que el orden es complatible con las operaciones. Cuestiones que se dejan como ejercicio.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es