

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES DE POTENCIAS.

Las series de Taylor son un caso particular de **Series de Potencias**.

Definición. 1. Dada una sucesión $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y un número real $a \in \mathbb{R}$, se llama **serie de potencias** centrada en "a" a la expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k.$$

La serie de Taylor de una función f es una serie de potencias (y diceversa, pero eso lo vemos después) donde $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Por otro lado, toda serie de potencias al menos converge para $x = a$.

Una serie de potencia la podemos ver como una función

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x).$$

Visto así nos interesa el dominio de esta función, es decir para que valores de x converge la serie.

- Ejemplos. 1.**
- El dominio de $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ es todo \mathbb{R} .
 - El dominio de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ es $[-1, 1]$ y allí coincide con la $\arctan x$ como vimos en el artículo anterior.
 - El dominio de $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ solo es $x = 0$.

En general se tiene el siguiente resultado.

Teorema. 1. Sea una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = f(x),$$

de modo que $y \in \text{Dom}f$, y sea un real positivo $0 < r < |y-a|$, entonces

- $[a-r, a+r] \subset \text{Dom}f$, es decir la serie de potencias converge para todo x de modo que $|x-a| \leq r$; además lo hace absolutamente.

- Existe $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ para todo x de modo que $|x-a| \leq r$.

Demostración: Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k$ es convergente, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(y-a)^k = 0$$

y así existe $M > 0$ de modo que

$$|a_k|(y-a)^k < M \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ahora si $|x-a| \leq r < |y-a|$, así $\frac{|x-a|}{|y-a|} = s < 1$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(x-a)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(y-a)^k \left(\frac{|x-a|}{|y-a|}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} Ms^k < \infty$$

ya que la serie geométrica es convergente. Luego por el Criterio de comparación nuestra serie es absolutamente convergente y por tanto la serie es convergente (hay que repasar los Criterios de Convergencia de Series en el Tema de Series).

Ahora observemos que

$$|ka_k(x-a)^{k-1}| \leq k|a_k|\frac{1}{r}|x-a|^k \leq k|a_k|\frac{1}{r}|y-a|^k \frac{|x-a|^k}{|y-a|^k} \leq \frac{M}{r}ks^k.$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} ks^k < \infty$ (ya que $0 < s < 1$, compruébalo), entonces de nuevo por el Criterio de Comparación la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente para todo $|x-a| \leq r$.

Observemos que esta última serie es la derivada formal, término a término, de la serie de potencias de partida. Aunque no lo vemos con detalle efectivamente coincide con $f'(x)$ \square

Observación. 1. Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, existe su derivada y es otra serie

de potencias $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-a)^{k-1}$, con $f'(a) = a_1$, luego existe f'' y el

resto de derivadas sucesivas, que son series de potencias con $f^{(k)}(a) = a_k k!$. Así la serie de Taylor de una función, que viene dada por una serie de potencias, existe y coincide con la serie de potencias.

El Teorema anterior también nos dice que si una función viene dada por una serie de potencias, entonces su dominio es un punto, un intervalo o bien toda la recta real.

Definición. 2. Dada una serie de potencias $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, se llama **radio de convergencia** de la serie al número

$$R = \sup\{|y-a| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k \text{ es convergente}\}$$

R al menos es *cero* ya que para $y = a$ la serie converge. Además del Teorema anterior tenemos que

Teorema. 2. Dada una serie de potencias $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, entonces o bien

- $R = 0$, o bien
- $R > 0$ y para todo $0 < r < R$ la serie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, converge absolutamente para todo $x \in [a-r, a+r]$, y por tanto para todo $x \in (a-R, a+R)$ o bien
- $R = \infty$.

Demostración: Es una aplicación del Teorema anterior \square

Ejemplo. 1. Nos dan la serie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k}$. ¿Cuál es radio de convergencia de la serie? ¿Cuál es el dominio de f ?

Demostración: Echamos mano del Criterio de Cociente, para ver para que valores de x la serie converge. Así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x-2|^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{|x-2|^k}{3^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x-2|}{3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Así el criterio de cocientes nos dice que si

- $\frac{|x-2|}{3} < 1$, la serie converge absolutamente (equivalente a $|x-2| < 3$);
- $\frac{|x-2|}{3} > 1$, la serie diverge.

Luego por el Teorema anterior el radio de convergencia que buscamos es $R = 3$. Por otro lado, para

- $x = 5$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty; \text{ y para}$$

- $x = -1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

la serie diverge.

Luego concluimos que $\text{Dom}f = (-1, 5)$ \square

Por último damos la siguiente definición.

Definición. 3. *Un función f se llama **analítica** en un entorno del punto a si se puede representar como una serie de potencias centrada en a , es decir existe $\delta > 0$ de modo que para todo $|x - a| < \delta$ se tiene que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$$

El concepto de función analítica alcanza su mayor poder cuando trabajamos con funciones de variable compleja.

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar.Ruiz@mat.ucm.es