ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES DE FUNCIONES

Las series de funciones son un caso particular, especialmente importante, de sucesiones de funciones.

Ya hemos estudiamos las series de Taylor.

Si consideramos una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y formamos la sucesión de sumas parciales

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x), \qquad \text{donde} \qquad N \in \mathbb{N}$$

(proceso análogo al seguido en el caso de series numéricas visto en primer curso) podemos preguntarnos si existe el límite de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$. Así por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ denotamos una *serie de funciones* que hace referencia al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$.

Definición 1. *La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, donde $x \in A \subset \mathbb{R}$,*

1. *converge puntualmente a la función f en $x \in A$ si $f(x)$ es el límite puntual de la sucesión de sumas parciales $(S_N(x))_{N=1}^{\infty}$. En ese caso escribimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.*
2. *La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f sobre A si $f(x)$ es el límite uniforme sobre A de la sucesión de sumas parciales $(S_N)_{N=1}^{\infty}$. En ese caso escribimos $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sobre A.*

Ahora los resultados que tenemos para la convergencia de sucesiones de funciones se trasladan directamente a la convergencia de series con un simple cambio de notación.

Corolario 1. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones que converge uniformemente a la función* f *sobre un intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, entonces*

1. *si cada función* f_n *es continua en* $[a,b]$*, también lo será* $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *para cada* N *y así* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es continua sobre* $[a,b]$*;*
2. *si cada función* f_n *es integrable sobre* $[a,b]$*, también lo será* $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *para cada* N *y así* f *es integrable sobre* $[a,b]$ *y se verifica la fórmula*
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Ejemplo 1. *Para la función* $f(x) = e^x$ *vamos a ver que su serie de Taylor converge uniformemente.*

La serie de Taylor de la función exponencial es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Tenemos que ver que la sucesión de sumas parciales $(S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!})_N$ (o de los polinomios de Taylor de la función exponencial) converge uniformemente.
$$|e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}| = |R_{N,0,e^x}|$$
El Teorema de Taylor, en su forma integral, nos decía que el resto anterior es igual a
$$\left| \int_0^x \frac{f^{N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N dt \right| = \left| \int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt \right| \le e^{|x|} \int_0^x \frac{|x-t|^N}{N!} dt$$
$$= e^{|x|} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \le \frac{\text{máx}\{1, e^a\} a^{N+1}}{(N+1)!} \to_{N\to\infty} 0$$
para todo $x \in [-a,a]$ donde a es una cantidad positiva. Por tanto la serie de Taylor de la exponencial converge uniformemente a la exponencial sobre todo intervalo $[-a,a]$ siendo $a > 0$.

Ejemplo 2. *Queremos calcular la integral* $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

Dijimos que la función e^{-x^2} no admite una primitiva elemental, y por tanto la regla de Barrow no es aplicable en este caso. Por otro lado una integral como la de arriba es muy importante en la Teoría de las Probabilidades. Para calcularla tenemos en cuenta que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \qquad \forall x \in [-a, a]$$

con convergencia uniforme. Luego podemos aplicar la segunda parte del corolario anterior y así

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx$$

calculando una primitiva y, ahora si, aplicando la regla de Barrow

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} |_0^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

En el caso de las series de funciones tenemos un criterio que nos dice cuando una serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual.

Teorema 1. *(***Prueba M de Weierstrass***) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que existe una sucesión númerica $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ de modo que*

1. $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in A,$
2. *la serie númerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente;*

entonces para todo $x \in A$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y además la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a su límite puntual sobre A.

Demostración:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

por tanto existe una función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para toda $x \in A$, límite puntual de la serie de funciones. Además

$$|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)| = |\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} M_n \to_{N\to\infty} 0$$

independientemente de la x. Así la convergencia de la serie de funciones es uniforme sobre N $\square$

Ejemplo 3. *Queremos averiguar el carácter de la serie de funciones* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}$.

Como $\displaystyle|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y sabemos que esta última serie numérica es convergente, la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie de funciones converge uniformemente sobre todo $\mathbb{R}$.

Observación 1. *Para tratar con series de funciones es conveniente recordar los criterios de convergencia de series numéricas que vimos en primer curso (en particular el Criterio de Comparación y el Criterio del Cociente).*

Ejemplo 4. *Si queremos estudiar la serie de funciones* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *con* $x \in [0, 1]$,

hay que tener en cuenta que es una *serie geométrica* y por tanto converge si $|x| < 1$. Así si $x \in (0, 1)$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Es nula si $x = 0$ y diverge para $x = 1$. Usando la prueba M de Weierstrass se puede ver que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge unifromemente sobre todo intervalo $[0, a]$ siempre que $a < 1$.

Ejemplo 5. *Sabemos que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *con convergencia uniforme sobre* $[-a, a],\ a > 0$. *Otra forma de verlo es la que sigue.*

Para todo $x \in [-a, a]$, podemos usar el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

y así deducimos que la serie de funciones converge puntualmente en cada $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado $\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|a|^n}{n!}$ para todo $x \in [-a, a]$, como además la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ es convergente, la prueba M de Weierstrass nos dice que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniforme sobre $[-a, a]$.

La convergencia de la serie de Taylor de la función exponencial nos permite intuir que se puede dar una definición de una función exponencial de variable compleja. Esta función junto con sus propiedades nos será muy útil cuando estudiemos la *Transformada de Fourier*.

Definición 2. *Para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ se define la función exponencial compleja por*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Tomando módulos $|z|$ en la serie y aplicando el criterio del cociente, vemos que la serie que define a la exponencial compleja converge absolutamente para todo z y por tanto es convergente. También se puede ver que la convergencia es uniforme en todo conjunto acotado de $\mathbb{C}$.

Proposición 1. *(***Fórmula de Euler** *) Si $t \in \mathbb{R}$ entonces*

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

*D*emostración:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ii^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

donde hemos usado que $i^2 = -1$ y las expresiones en serie de Taylor de las funciones coseno y seno □

De aquí, en primer lugar una curiosidad.

Observación 2. $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Las siguientes propiedades de la exponencial compleja nos serán útiles a la hora de calcular transformadas de Fourier.

Proposición 2.
1. $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$
2. $|e^{it}| = 1$
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$
4. $\cos nt = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ *y* $\operatorname{sen} nt = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}.$

*D*emostración: 1 y 2 salen directamente de la fórmula de Euler. Para ver 3

$$\overline{e^{it}} = \overline{\cos t + i \operatorname{sen} t} = \cos t - i \operatorname{sen} t = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = e^{-it}$$

Veamos la primera igualdad de 4; la segunda queda como ejercicio.

$$\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}=\frac{cosnt+i\operatorname{sen}nt+\cos nt-i\operatorname{sen}nt}{2}=\cos nt.$$

Una forma de ver 5 es la que sigue

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt+i\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}ntdt$$

$$\frac{\operatorname{sen}nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+i(\frac{-\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{i\operatorname{sen}nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}+(\frac{\cos nt}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi})=\frac{e^{int}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\ \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es