ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CARACTERIZACIÓN DE CERRADOS Y COMPACTOS POR SUCESIONES.

Los conjuntos de $\mathbb{R}$ cerrados y los conjuntos compactos pueden ser caracterizados por sucesiones. De hecho la caracterización de los compactos por sucesiones es la propiedad que les hace útiles en Análisis Matemático (algo de esto veremos al estudiar máximos y mínimos de funciones continuas).

Teorema. 1. **a:** *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si para toda sucesión convergente de elementos de C, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset C$, con $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, se tiene que $x \in C$.*

b: *Un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de K, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$, tiene al menos una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$.*

Demostración:

a:
- Supongamos que C es cerrado y que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, con $x_n \in C$, para todo n. Si $x \notin C$, entonces como $\mathbb{R}\backslash C$ es abierto, existe $r > 0$ con $(x-r, x+r) \bigcap C = \emptyset$. Esto nos dice, por definición de límite, que x no es el límite de la sucesión. Contradicción.
- Supongamos que C tiene la propiedad de que para toda sucesión convergente de elementos de C, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset C$, con $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, se tiene que $x \in C$. Supongamos que C no es cerrado, o equivalentemente que $\mathbb{R}\backslash C$ no es abierto. Entonces existe $x \in \mathbb{R}\backslash C$ de modo que para todo $r > 0$, se tiene que $(x-r, x+r) \bigcap C \neq \emptyset$. En particular para todo n natural positivo existe $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \bigcap C$, es decir $x_n \in C$ y $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ para todo n. Lo cuál contradice la hipótesis. Así necesariamente C tiene que ser cerrado.

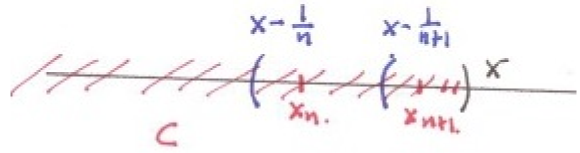

FIGURA 1. Punto de acumulación.

b:
- Si K es compacto, es decir cerrado y acotado, y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de K, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión convergente $(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} x$. Como K es cerrado, entonces $x \in K$.
- Supongamos que toda sucesión de elementos de K, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$, tiene al menos una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$. Usanso esta hipóteisis y el apartado **a)** K es cerrado.

  Si K no fuese acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $x_n \in K$ de modo que $x_n > n$. Pero entonces esta sucesión no tendría ninguna subsucesión convergente (cualquier subsucesión es no acotada), lo que contradice la hipótesis

□

Observación. 1. *Toda sucesión convergente de números reales junto con su límite forman un conjunto compacto.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es