AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

En primer curso hemos estudiado los cuerpos:

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Los números reales los construíamos, entre otras razones, para asegurar la existencia de raíces cuadradas de los números positivos.

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el cuerpo de los números reales, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 \geq 0$. El cuerpo de los números complejos se construye para que la ecuación anterior tenga solución. En general para poder definir la raíz cuadrada de cualquier número.

En este curso veremos que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces en un cuerpo suficientemente grande (**extensiones de cuerpos**). De hecho $\mathbb{C}$ es una extensión del cuerpo $\mathbb{R}$, donde podemos encontrar todas las raíces de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ (**Teorema Fundamental del Álgebra**). Aunque este hecho no nos va interesar mucho.

En este Apéndice vamos a repasar los números complejos por su importancia en la formulación de la **Teoría de la Señal**.

Ejemplo 1. *La ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ no tiene raíces en el cuerpo $\mathbb{R}$ (donde si pertenecen los coeficientes del polinomio).*

Si la ecuación tuviese solución, ésta sería

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} \; \square$$

En $\mathbb{R}$ no existe ningún número que elevado al cuadrado de -1. Para que la ecuación anterior tenga solución tenemos que "inventar" tal número.

Definición 1. *Se llama **número imaginario** i al número con la propiedad de que $i^2 = -1$ (o eqivalentemente $i = \sqrt{-1}$).*

Podemos construir, también, números de la forma $a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y operarlos (sumarlos y multiplicarlos) con las reglas "habituales" de los números, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

Ejemplo 2.
- $(2+3i)+(7+2i) = 2+7+(3+2)i = 9+5i$.
- $(2+3i)\times(7+2i) = 2(7+2i)+3i(7+2i) = 14+4i+21i+6i^2 = 14-6+25i = 8+25i$

(Así se empezo a trabajar en el siglo XVI con esta nueva clase de números, aunque no se entendia muy bien lo que eran).

Más formálmente, se puede definir el conjunto de los **números complejos** de la siguiente manera.

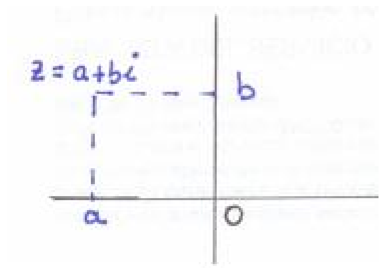

FIGURA 1. El plano complejo.

Definición 2. *Se llama conjunto de los números* ***complejos*** $\mathbb{C}$ *al conjunto*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\};$$

dotado de dos operaciones, una

- ***suma:*** *para todo* $z_1 = (a,b), z_2 = (c,d) \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C};$$

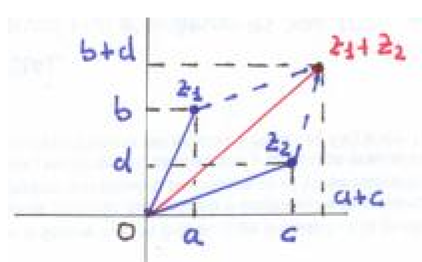

FIGURA 2. Suma de números complejos.

y un

- ***producto:*** *para todo* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$
$$(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}.$$

Además se puede definir un producto por escalares

- ***producto por escalares:*** *para todo* $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ *y para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\lambda z = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b).$$

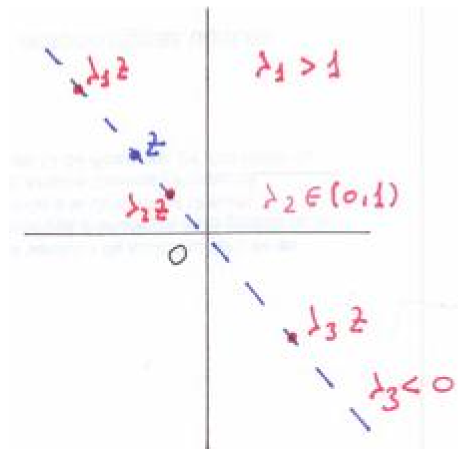

FIGURA 3. Producto por un escalar en $\mathbb{C}$.

Observación 1. $\mathbb{C}$ *con la suma y el producto por escalares es un* ***espacio vectorial*** *sobre el cuerpo de los números reales* $\mathbb{R}$ *indistinguible del espacio vectorial de dimensión* 2 $\mathbb{R}^2$.

Según la definición anterior podemos observar lo siguiente.

Observación 2.
- $(a,0) \times (b,0) = (ab, 0)$.
- $(0,1) \times (0,1) = (-1, 0)$. *Luego* $i = (0,1)$.
- $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi$

donde la última igualdad es una notación, compatible con lo que hemos visto hasta ahora de números complejos.

Notación: los números complejos se suelen notar con la letra z. Así escribiremos $z \in \mathbb{C}$ y queremos decir que existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $z = a + bi$.

Ejemplo 3. *Ahora, para el ejemplo de arriba* $x^2 + 2x + 2 = 0$, *estamos en condiciones de decir cuáles son sus raíces:* $x = -1+i$ *y* $x = -1-i$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`