AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

APLICACIONES.

Ejemplo 1. *La ecuación polinómica* $x^2 + 2x + 2 = 0$, *con coeficientes reales, tienen* ***dos soluciones complejas conjugadas****:* $-1 + i$ *y* $-1 - i$.

Este no es un hecho aislado.

Proposición 1. *Sea* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ *una ecuación polinómica de grado* n, *con coeficientes* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *es una solución de la ecuación, entonces su conjugado* $\overline{z}$ *también lo es.*

Demostración: Por ser z una raíz del polinomio

$$0 = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n.$$

Tomando conjugados y aplicando las propiedades de la conjugación,

$$\overline{0} = \overline{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + ... + \overline{a_n z^n}$$

$$= a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z}^n.$$

Lo que prueba que $\overline{z}$ es una raíz del polinomio $\square$

Ejemplo 2. *Si* $x^2 + ax + b$, *es un polinomio de segundo grado con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *y sin raíces reales, entonces existen* $\alpha + \beta i, \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$ *raíces del polinomio. Además*

$$x^2 + ax + b = (x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i)) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Despejando se tiene que

$$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad y \qquad \beta = \sqrt{b - \alpha^2} = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Observación 1. *Si* $z = a + bi \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = ||z||^2.$$

Definición 1. *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **módulo** de z al escalar*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observación 2. *El módulo $|z|$ de un complejo z es igual al módulo (o norma) de un vector z en $\mathbb{R}^2$ ($||z||$, la distancia de z al origen) y por tanto tiene las mismas propiedades:*

- $|z| \geq 0$; *si* $|z| = 0$, *entonces* $z = 0$.
- $|zw| = |z||w|$ *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.

Definición 2. *Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se llama*

- ***módulo*** *de z a* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- ***argumento*** *de z a $Arg z = \sphericalangle(1, 0)z \in [0, 2\pi) = \theta$, el ángulo que forma el eje OX con el vector determinado por z (ver el dibujo de abajo);*
- ***forma polar*** *de z a*

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = e^{i\theta}.$$

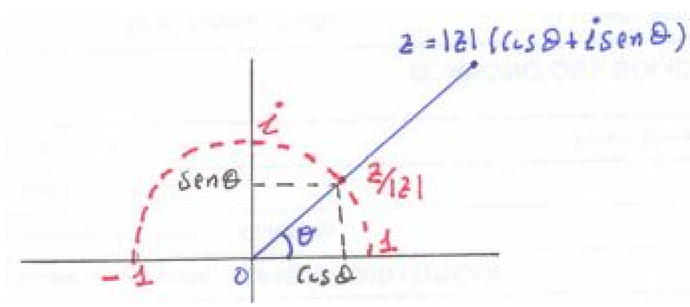

FIGURA 1. Forma polar de un complejo.

La forma polar de un número complejo nos permite entender mejor la multiplicación en $\mathbb{C}$. Después de la siguiente Proposición entenderemos que un productos de complejos no es más que un **giro** junto con una **homotecia.**

Proposición 2. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con*

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad y \qquad w = |w|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

entonces se tiene que

$$zw = |z||w|(\,\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta)\,)$$

Demostración:

$$zw = |z||w|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$$

$$= |z||w|\big((\cos\theta\cos\beta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta) + i(\cos\theta\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\beta)\big)$$

$$= |z||w|(\cos(\theta+\beta) + i\operatorname{sen}(\theta+\beta)) \ \square$$

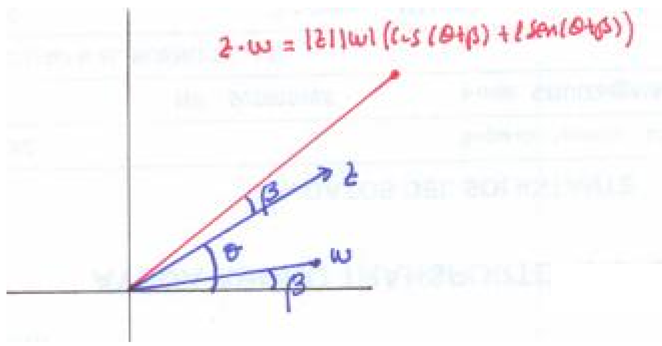

FIGURA 2. Giro con homotecia.

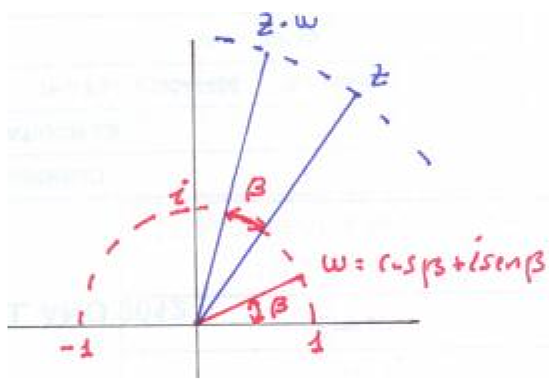

FIGURA 3. Giro para $|w| = 1$.

Con esta nueva imagen del producto de complejos, ahora es fácil calcular raíces de números complejos.

Proposición 3. **a:** *Para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$z^n = |z|^n(\cos(nArgz) + i\,\mathrm{sen}(nArgz)).$$

b: *Para todo* $z, w \in \mathbb{C}$ *existe un* $k \in \mathbb{Z}$ *de modo que*

$$Arg(zw) = Argz + Argw + 2k\pi.$$

c: *Si* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *con* $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, *y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta + 2k\pi}{n})\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Antes de hacer la demostración veamos algunas consideraciones sobre los enunciados. En primer lugar, el apartado **c)** nos dice que existen n **raíces** n-ésimas de todo complejo no nulo.

Notación: Para $z = 1$ sus n raíces n-ésimas se pueden escribir de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

donde $e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$ (fórmula de Euler).

En el siguiente ejemplo mostramos lo que nos dice el apartado **b)**.

Ejemplo 3. *Si* $z = -1$ *y* $w = -i$, *entonces* $Argz = \pi$, $Argw = \frac{3\pi}{2}$ *y* $zw = i$. *Luego*

$$Arg(zw) = Argi = \frac{\pi}{2} = Argz + Argw - 2\pi = \pi + \frac{3\pi}{2} - 2\pi.$$

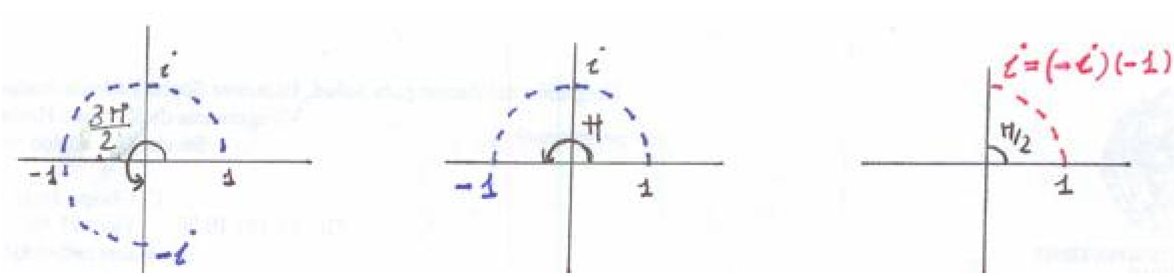

FIGURA 4. Argumentos mayores que 2π.

Demostración:

a: Se sigue directamente de la Proposición anterior aplicando la fórmula de multiplicación n veces.

b: Como

$$0 \leq Argz < 2\pi \qquad \text{y} \qquad 0 \leq Argw < 2\pi,$$

entonces $0 \leq Argz + Argw < 4\pi$. Ahora si

$$Argz + Argw \in [0, 2\pi) \qquad \Rightarrow \qquad Arg(zw) = Argz + Argw.$$

En otro caso,

$$Argz+Argw \in [2\pi, 4\pi) \qquad \Rightarrow \qquad Arg(zw) = Argz+Argw-2\pi \in [0, 2\pi).$$

c: Si tenemos una raíz n-ésima de z ($w^n = z$), como

$$w^n = |w|^n(\cos(nArgw) + i\,\mathrm{sen}(nArgw)) = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

y la forma polar de un número complejo es única siempre que el argumento permanezca en el intervalo $[0, 2\pi)$, se sigue que

$$\left\{\begin{array}{rcl} |w|^n & = & |z| \\ nArgw & = & \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} |w| & = & \sqrt[n]{|z|} \\ Argw & = & \frac{\theta+2k\pi}{n}. \end{array}$$

Observemos que

$$\frac{\theta}{n} < \frac{\theta+2\pi}{n} < \frac{\theta+4\pi}{n} < .... < \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} < \frac{\theta+2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Vemos que para los n valores de $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$, tenemos n argumentos distintos de la forma $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$; para otros valores del argumento de w dados por otros k, solo conseguimos repetir las raíces que ya tenemos $\square$

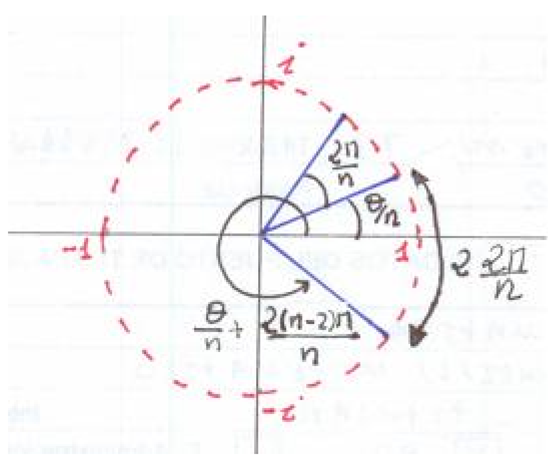

FIGURA 5. $\cos\frac{\theta}{n} = \cos(\frac{\theta}{n} + 2\pi)$.

Ejemplo 4. *Vamos a calcular las raíces cúbicas de la unidad* $\sqrt[3]{1}$.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}(\cos(\frac{0+2k\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{0+2k\pi}{3})), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Luego las tres raíces que nos salen son $z_1 = 1$, $z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3})$ y por último $z_3 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{3})$. Observemos que las tres raíces sobre la circunferencia unidad dibujan un triángulo equilátero $\square$

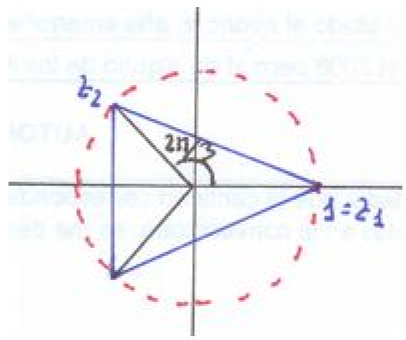

Figura 6. Raíces cúbicas de la unidad.

Ejemplo 5. *Vamos a calcular las raíces cuartas de* -1, $\sqrt[4]{-1}$.

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\frac{\pi+2k\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi+2k\pi}{4})), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Luego las cuatro raíces que nos salen son $z_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})$, $z_2 = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{4})$, $z_3 = \cos(\frac{5\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{4})$ y por último $z_4 = \cos(\frac{7\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{4})$. Observemos que las cuatro raíces sobre la circunferencia unidad dibujan un cuadrado $\square$

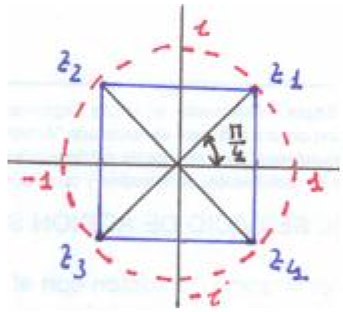

Figura 7. Raíces cuartas de -1.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es