ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Pensemos geométricamente. En primer lugar repasemos la fórmula de la recta que pasa por dos puntos. Si una recta pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$,

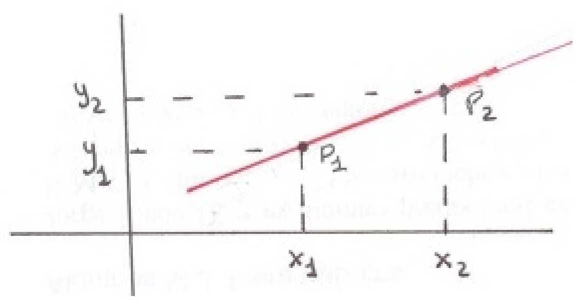

Figura 1. Recta que pasa por dos puntos.

su **pendiente** m es independiente de los dos puntos tomados:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

(esto se debe a la proporcionalidad que hay entre triángulos semejantes, Teorema de Tales). Así la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

En segundo lugar, pensemos en la gráfica de una función f, un punto sobre su gráfica P y distintas rectas que pasan por P y se apoyan en otro de la gráfica. Ver el dibujo siguiente.

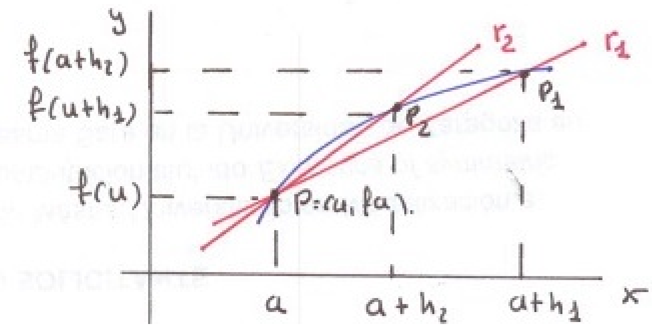

Figura 2. Cuerdas a un gráfica por un punto P.

Las rectas r_1 y r_2 tienen pendientes $\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}$ y $\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$ respectivamente. Si a las rectas anteriores las empujamos el punto P_h hacia P (en el caso de que la gráfica sea continua eso se consigue haciendo h muy pequeño), ¿llegaremos a una posición límite de la recta de modo que sea la recta próxima de la que hablabamos en la introducción? La respuesta la dan las dos Definiciones siguientes y el Teorema de después.

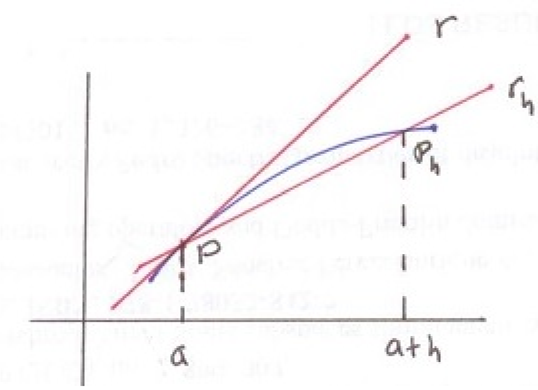

Figura 3. Recta tangente por el punto P.

Definición. 1. *Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y un punto $a\in Domf$ tal que existe $r>0$ con $(a-r,a+r)\subset Domf$, se dice que f es **derivable** en el punto $x=a$ si existe el límite*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

A dicho límite $f'(a)$, si existe, le llamamos derivada de la función en el punto a. Se dice que la función f es derivable en $A\subset Domf$ si es derivable en cada punto de A. LLamamos función derivada de f a la función f' cuyos valores son las derivadas de f allí donde sea derivable.

Observación. 1. *Si x está cerca de a, entonces $x-a=h$ está cerca de cero y diceversa. Luego*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Ejemplos. 1.
- *Sea la función constante $f(x)=k$. Entonces $f'(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*
- *Sea la función identidad $f(x)=x$. Entonces $f'(x)=1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Demostración:

- Si $f(x)=k$, entonces para $x=a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0.$$

- Si $f(x)=x$, entonces para $x=a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

□

No todas las funciones son derivables, veamos un ejemplo.

Ejemplo. 1. *La función valor absoluto no es derivable en $x=0$.*

Demostración: Como la función $f(x)=|x|$ viene dada por dos fórmulas, según x sea positivo o no, tomando límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,$$

y

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

Los límites laterales son distintos, luego el límite no esiste □

Volviendo a nuestra imagen **geométrica**, podemos definir:

Definición. 2. *Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y un punto $a\in Domf$ donde f es derivable, llamamos recta **tangente** a la gráfica de f por el punto $(a,f(a))$ a la recta*

$$r(x)=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Observación. 2. *La recta **tangente** a la gráfica de una función por un punto es la recta que pasa por ese punto y cuya **pendiente** la da la **derivada** de la función en el punto.*

Teorema. 1. *Sean una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y un punto $a \in Domf$ donde f es derivable. Sea la recta tangente por dicho punto $r(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$, entonces:*

a: *la recta r pasa por el punto $(a, f(a))$;*

b: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-r(x)}{x-a} = 0$;

c: *si $s(x) = b(x-a)+f(a)$ es otra recta que pasa por $(a, f(a))$ y verifica que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-s(x)}{x-a} = 0$, entonces necesariamente $s = r$.*

Demostración: Claramente $r(a) = f'(a)(a-a) + f(a) = f(a)$. Por otro lado

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)}{x-a}$$

usando la definición de derivada

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Por otro lado si $s(x) = b(x-a) + f(a)$, una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-s(x)}{x-a} = 0$, entonces

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-s(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x)+r(x)-s(x)}{x-a}$$

sustituyendo r y s por sus respectivas fórmulas

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) + (f'(a)-b) = f'(a) - b.$$

Por tanto $0 = f'(a) - b$ y se tiene que $b = f'(a)$ $\square$

Observación. 3. *La diferencia $x-a$ tiende a cero cuando x se acerca al valor a. El límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x)}{x-a} = 0$ dice que los valores de la recta r se acercan a $f(x)$ más rapidamente que lo hace x al valor a.*

El Teorema anterior dice que de las rectas que pasan por $(a, f(a))$, la recta tangente es la que más se aproxima a los valores de la función cuando x está cerca del valor a. Es lo que llamabamos la recta próxima en la introducción.

En ciertas situaciones, en ciertos cálculos, dada una función $y = f(x)$ se puede sutituir los valores de y por

$$y \simeq f'(a)(x-a) + f(a) \qquad \text{si} \qquad x \simeq a.$$

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ por el punto (1,1).*

Demostración:

El punto $(1,1)$ pertenece claramente a la gráfica de la función. Tenemos que calcular $f'(1)$. Como $f'(x) = 3x^2$ (ver la sección siguiente sobre Cálculo de Derivadas), tenemos que $f'(1) = 3$ y así la recta tangente es

$$r(x) = 3(x-1) + 1$$

$\square$

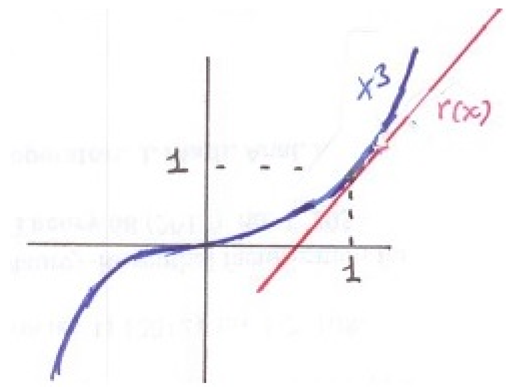

FIGURA 4. Recta tangente a la gráfica de $y = x^3$.

Ejercicio. 1. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función para la cuál existe una constante $M > 5$ de modo que*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M \qquad \textit{para todo} \qquad x, y \in (a,b).$$

Si $c \in (a,b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c))$ ***no*** *puede ser:*

a) $y = x + f(c) - c$ *b)* $y = \frac{M^2+1}{2M}(x-c) + f(c)$

c) $y = -\frac{M}{3}(c-x) + f(c)$ *d)* $y = -\frac{M}{4}x + f(c) + \frac{Mc}{4}$.

Demostración: Como $M > 5$ se sigue que $\frac{1}{5} > \frac{1}{M}$. Así por la propiedades de los límites $\frac{1}{M} \leq f'(c) \leq M$. Por otra lado la recta tangente en $(c, f(c))$ es de la forma $r(x) = f'(c) = f'(c)(x-c) + f(c)$.

- **a:** En este caso $f'(c) = 1$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **b:** En este caso $f(c) = \frac{M^2+1}{2M} \geq \frac{M^2}{2M} = \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. Además $M > \frac{M^2+1}{2M}$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **c:** En este caso $f'(c) = \frac{M}{3}$, lo cuál es compatible con nuestras hipótesis.
- **d:** En este caso $f'(c) = -\frac{M}{4} < 0$, lo cuál **no** es compatible con nuestras hipótesis

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es