ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

APLICACIONES DE LA DERIVADA. BUSQUEDA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La derivada permite descubrir propiedades de la función de la cuál se deriva, por ejemplo la localización de máximos y mínimos. Fijémonos en la siguiente figura.

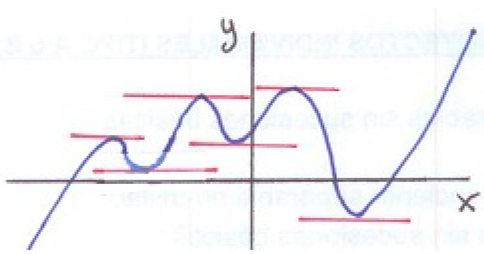

FIGURA 1. Máximos y mínimos locales.

En los puntos de esta gráfica donde la función alcanza una cuspide o un valle, parece que las rectas tangentes en dichos puntos son paralelas al eje de las "x", o lo que es lo mismo que las pendientes de esas rectas son nulas. Si la función es derivable, eso quiere decir que la derivada en tales puntos es cero. Vamos a formalizar lo anterior. Lo primero definir lo que entendemos por "cuspide" y "valle"

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $x = a$ de su dominio.*

- **a:** *Se dice que a es un* ***máximo relativo*** *o* ***local*** *de f si existe $r > 0$, con $(a - r, a + r) \subset Domf$, de modo que para todo $x \in (a - r, a + r)$ se verifica que*
$$f(x) \leq f(a).$$
- **b:** *Se dice que a es un* ***mínimo relativo*** *o* ***local*** *de f si existe $r > 0$, con $(a - r, a + r) \subset Domf$, de modo que para todo $x \in (a - r, a + r)$ se verifica que*
$$f(x) \geq f(a).$$

Observación. 1. *Los máximos o mínimos de una función definida en todo intervalo abierto o semirecta abierta son claramente máximos o mínimos locales respectivamente. El recíproco no tienen por que ser cierto como se ve claramente en la figura anterior.*

Si una función es derivable, es fácil descubrir donde están sus **extremos relativos** (otra forma de referirnos a los máximos y mínimos locales). Según la figura de arriba estarán entre los puntos donde la derivada se anula. Veámoslo.

Proposición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x = a$ un máximo o mínimo local de la función. Si existe $f'(a)$, entonces necesariamente $f'(a) = 0$.*

Demostración: Supongamos que $x = a$ es un máximo relativo y que $(a - r, a + r) \subset \mathrm{Dom} f$. (El caso $x = a$ un mínimo relativo se deja como ejercicio). Entonces si

- $x > a$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0;$$

- $x < a$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Como existe, por hipótesis, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, no queda otra opción que $f'(a) = 0$. $\square$

El resultado anterior no es más que una condición necesaria que deben verificar los extremos relativos. Los siguientes ejemplos nos muestran que el trabajo de encontrar máximos y mínimos de una función es algo más complicado que calcular los ceros de una derivada.

Ejemplos. 1.

- *En el siguiente ejemplo vemos que $x = 0$ es un mínimo de la función $y = |x|$. Este punto* ***no*** *puede ser hallado por la derivada ya que esta función no es derivable en $x = 0$.*

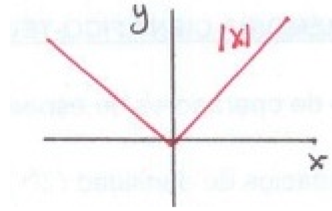

FIGURA 2. Mínimo de una función en un punto sin derivada..

- *La función $y = x^3$ tiene por derivada $y = 3x^2$ que se anula para $x = 0$. Sin embargo en tal punto la función no tiene ni un máximo ni un mínimo local.*

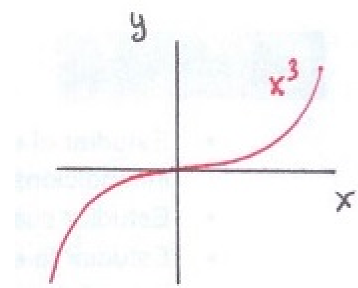

FIGURA 3. La función $y = x^3$ siempre crece.

- *En la figura siguiente se ve una gráfica con dos punto de mínimo local, $x = a$ y $x = c$, pero solo $x = c$ es un mínimo de la función. En $x = b$ tenemos un máximo local, pero que no es máximo.*

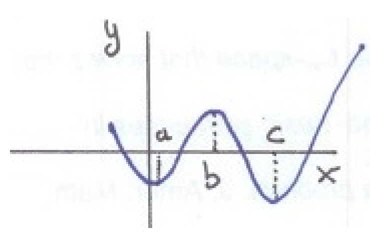

FIGURA 4. Máximos y mínimos locales.

Sabemos que toda función continua sobre un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo.

Observación. 2. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $Domf \subset \mathbb{R}$, los puntos del dominio en los que nos tenemos que fijar para encontrar su máximo y su mínimo (si los tiene) son:*

- *los puntos extremos del dominio (en la frontera del dominio $\partial Domf$);*
- *los puntos donde f no es continua ni derivable;*
- *los puntos de derivada nula.*

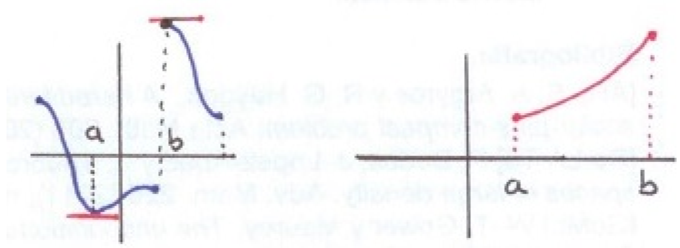

FIGURA 5. Máximos y mínimos.

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`