# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (E.D.O.)

En algunos problemas surgen una relación, una ecuación, entre una función, que no conocemos (incógnita), y su derivada primera u otras derivadas de la función. Esto es lo que llamamos una **ecuación diferencial**.

**Ejemplo 1.** *De una curva se sabe que la recta tangente por un punto* $(x, f(x))$ *de esta curva tiene una pendiente igual a* $3 + f(x)$*. Además se sabe que la curva pasa por el punto* $(0, 2)$*.*

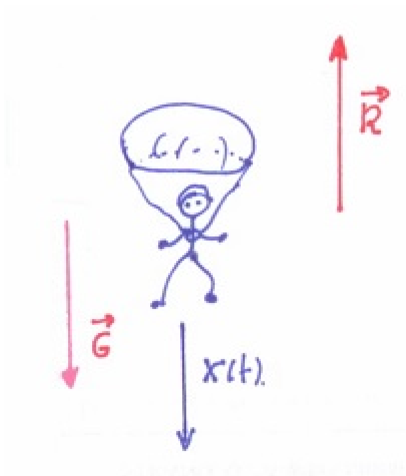
La información que tenemos, considerando que la curva es la gráfica de cierta función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(x) = f(x) + 3 \\ f(0) = 2. \end{array} \right.$$

Claro, la función $f$ la desconocemos. ¿Podemos, con los datos que tenemos, calcularla? La ecuación anterior es un ejemplo de **ecuación diferencial** (ordinaria de primer orden).

**Ejemplo 2.**

*Un paracaidista cae por la acción de la gravedad,*




*y solo es frenada su caída por una fuerza de rozamiento. ¿Podemos conocer cuál es el movimeinto de caída?*

Veamos. El movimiento de caída es rectilíneo y está dado por una función $x(t)$. Esta función para el tiempo $t$ toma el valor $x(t)$, la distancia recorrida en la caída. La fuerzas que intervienen en el movimiento son la fuerza de la gravedad $\overrightarrow{G}$ y la fuerza de rozamiento $\overrightarrow{R}$ que aparece en el paracaídas. La segunda Ley de Newton de la mecánica nos dice que la masa por la aceleración es igual a la resultante (suma) de las fuerzas que intervienen

$$mx''(t) = \overrightarrow{G} - \overrightarrow{R}.$$

Otros datos a tener en cuenta es que la fuerza de la gravedad es constante, cerca de la superficie terrestre, así $|\overrightarrow{G}| = gm$, con $g \approx 10m/s$. Por otro lado la fuerza de rozamiento es del tipo $\overrightarrow{R} = K(x')^2(t)$, con $K > 0$ una constante. De lo que se sigue que $mx''(t) = gm - Kx'^2(t)$ y por tanto

$$\begin{cases} x''(t) = g - \frac{K}{m}x'^2(t), \\ x(0) = 0 \text{ y } x'(0) = 0, \end{cases}$$

donde suponemos que justo en el momento del salto el paracaidista aún no ha caído nada y su velocidad de caída también es cero. Esta relación entre la función desconocida $x(t)$ y sus derivadas, en este caso $x'$ y $x''$, es otro ejemplo de **ecuación diferencial** (ordinaria de segundo orden). ¿Podemos calcular la función $x$ con los datos que tenemos?

Vamos a estudiar algunos casos en los que las ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas y ver como sirven para modelizar distintos fenómenos de la física y la ingeniería.

## E.D.O. GENERALIDADES

Una **ecuación diferencial** es una ecuación cuya **incógnita** es una **función** y en la que está presente una o varias derivadas de la función. Las ecuaciones diferenciales se pueden catalogar en función del número de variables de la función incógnita.

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O)** si la función incógnita de la ecuación diferencial tiene una única variable.
- **Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (E.D.P)** si la función incógnita de la ecuación diferencial tiene varias variables.

**Ejemplos 1.** *Ejemplos de ecuaciones direrenciales ordinarias son los vistos anteriormente.*

- Ejemplo 1:
$$\begin{cases} f'(x) = f(x) + 3 \\ f(0) = 2. \end{cases}$$
- Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x''(t) = g - \frac{K}{m} x'^2(t), \\ x(0) = 0 \text{ y } x'(0) = 0. \end{cases}$$

Las funciones $f$ y $x$ son funciones de una única variable, en el segundo caso $t$ el tiempo.

El ejemplo 1 lo es de una **E.D.O. de primer orden** por que en la ecuación diferencial solo aparece la derivada primera.

El ejemplo 2 lo es de una **E.D.O. de segundo orden** por que en la ecuación diferencial la derivada de mayor orden que aparece es la derivada segunda.

**Ejemplos 2.**

- *Si $u(t, x)$ es una función de dos variables,*
$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = u(t, x),$$
*es un ejemplo de **E.D.P de primer orden.***

- ***Ecuación de Laplace.*** *Si $u(x,y)$ es una función de dos variables,*
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$
*es un ejemplo de* ***E.D.P de segundo orden.***
- ***Ecuación del Calor.*** *Si $u(t,x,y)$ es una función de tres variables,*
$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}$$
*es un ejemplo de* ***E.D.P de segundo orden.***
- ***Ecuación de Ondas.*** *Si $u(t,x,y,z)$ es una función de cuatro variables,*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
*es un ejemplo de* ***E.D.P de segundo orden.***

**Observación 1.** *Resolver ecuaciones diferenciales es algo difícil y en muchos casos no podemos encontrar soluciones explícitas. De hecho se suelen utilizar métodos numéricos, métodos de aproximación de soluciones, para resolverlas. Algo que solo se puede hacer con ayuda de computadores.*

En lo que sigue vamos a centrarnos en el estudio de las **E.D.O** llamada **lineales** de primer y segundo orden. Estas ecuaciones si se puede resolver de forma explícita y además son las ecuaciones que simulan el comportamiento de los circuitos RLC: **oscilador armónico, filtros paso bajo y paso banda....etc**.

## Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
*E-mail address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`