AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

ECUACIONES DE VARIABLES SEPARADAS

Dada una ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad (1)$$

donde la función f se puede escribir como $f(t, x) = g(t)h(x)$, donde las funciones g y h son funciones de una variable; y así

$$x'(t) = g(t)h(x(t)), \qquad (1)$$

se dice entonces que la ecuación (1) es una E.D.O. de **variables separadas**.

Ejemplo 1. $\quad x'(t) = \dfrac{e^t}{(1 + e^t)x(t)}$

Aquí el papel de la función g *lo hace* $g(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)}$ *y* $h(x) = \frac{1}{x}$. *Por tanto la función* f *es* $f(t, x) = \frac{e^t}{(1+e^t)x}$, *que es una función continua en* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2\}$.

Las ecuaciones de **variables separadas** son especialmente sencillas y podemos dar un procedimeinto para resolverlas o **integrarlas** (también se emplea este término para referirnos a encontrar su solución). El siguiente Teorema nos dice como se integran (**lo cuál se ve en la demostración**).

Teorema 1. *Dadas dos funciones continuas en sus respectivos dominios*

$$g : (t_1, t_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

y

$$h : (x_1, x_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \textit{con } h(x) \neq 0 \textit{ para toda } x \in (x_1, x_2),$$

entonces para todo par de puntos $(t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ *existe una única solución* $x(t)$ *definida en un entorno del punto* t_0 *del problema de Cauchy de la ecuación de* ***variables separadas***

$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = g(t)h(x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Demostración: Esta prueba nos va a decir como resolver las ecuaciones de variables separadas. Consideramos las funciones $G(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s)ds$ y $H(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(r)}dr$. Ambas funciones existen y son derivables ya que las funciones g y $\frac{1}{h}$ son continuas (recordemos el Teorema Fundamental del Cálculo). Ahora, de la ecuación diferencial $x'(t) = g(t)h(x(t))$ separamos las variable y así

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (H \circ x)'(t) = G'(t)$$

e integrando en la variable t tenemos que $(H \circ x)(t) = G(t) + K$ donde K es una constante de integración. Como se tiene que verificar que $x(t_0) = x_0$ y por definición de la funciones se tiene que $H(x_0) = 0$ y $G(t_0) = 0$, se deduce que $K = 0$. Por tanto la solución del problema es la función implícita dada por $H(x(t)) - G(t) = 0$. Si existe la inversa de la función H (siempre existe, ver $(*)$), se tiene que $x(t) = H^{-1}(G(t)$.
(*) Dada la función $F(x, t) = H(x) - G(t)$, con $F(t_0, x_0) = 0$, y dado que $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{h(x)} \neq 0$, el **Teorema de la Función Implícita** (fuera de nuestro alcance) nos dice que efectivamente existe una función $x(t)$ derivable de modo que $F(x(t), t) = 0$ y que $x(t_0) = x_0 \square$

El siguiente ejemplo, en él que vamos a seguir los pasos de la demostración anterior, nos aclara la forma de proceder.

Ejemplo 2.

$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)x(t)} \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

Separando las variables

$$x'(t)x(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)}$$

integrando

$$\int_0^t x'(t)x(t)dt = \int_0^t \frac{e^t}{(1+e^t)}dt$$

de lo que se sigue que

$$= \frac{x^2(t)}{2} \Bigg| \begin{array}{c} t \\ 0 \end{array} = \log(1+e^t) \Bigg| \begin{array}{c} t \\ 0 \end{array}$$

$$= \frac{x^2(t)}{2} - \frac{x^2(0)}{2} = \frac{x^2(t)}{2} - \frac{1}{2} = \log(1+e^t) - \log(2)$$

despejando

$$x^2(t) = 1 + 2\log(\frac{1+e^t}{2}) \qquad \text{y} \qquad x(t) = \sqrt{1 + 2\log(\frac{1+e^t}{2})}$$

(la solución $x(t) = -\sqrt{1 + 2\log(\frac{1+e^t}{2})}$ también es posible, pero nuestra solución es positiva).

Ahora vamos a calcular el dominio de la solución,

$$1 + 2\log(\frac{1+e^t}{2}) \geq 0 \Longleftrightarrow \log(\frac{1+e^t}{2}) \geq -\frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow 1 + e^t \geq 2e^{-\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow e^t \geq 2e^{-\frac{1}{2}} - 1 \Longleftrightarrow t \geq \log(2e^{-\frac{1}{2}} - 1).$$

De forma gráfica

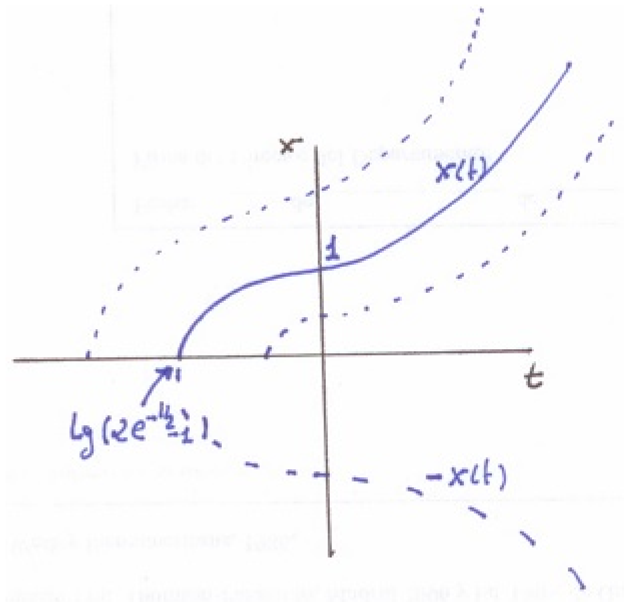

Figura 1. Solución de la E.D.O.

El dominio de la solución $x(t)$ no es todo $\mathbb{R}$, solo los t mayores que $\log(2e^{-\frac{1}{2}} - 1)$. La función $-x(t)$ también es solución de la ecuación diferencial, pero en este caso $-x(0) = -1$, cumple otra condición inicial. Las líneas de puntos representan otras soluciones posibles (en realidad es una familia infinita de funciones solución). Observemos que sobre el eje $x = 0$ no hay ninguna solución.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`