AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

E.D.O. LINEAL DE PRIMER ORDEN

La **ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea** es un caso particular de ecuación de variables separadas cuando $h(x) = x$. El caso no homogéneo, como veremos a continuación, es un poco más complejo.

Definición 1. *Sean dos funciones $a, b : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$.*

1. *Se llama **E.D.O. lineal de primer orden homogénea** a toda ecuación diferencial del tipo*
$$x'(t) = a(t)x(t).$$
2. *Se llama **E.D.O. lineal de primer orden (no homogénea)** a toda ecuación diferencial del tipo*
$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

Ejemplo 1. *La ecuación $x'(t) = tx(t) + t$ es una ecuación lineal de primer orden cuya **ecuación lineal homogénea asociada** es la ecuación $x'(t) = tx(t)$.*

Observación 1. ***En los CASOS LINEALES siempre se procede de la misma manera. Primero se resuelve el caso homogéneo asociado y después el problema general.***

El siguiente Teorema nos dice como son las soluciones de una ecuación lineal homogénea y también **como calcularlas**, aunque eso ya lo sabemos por ser un caso particular de ecuación de variables separadas.

Teorema 1. *Sea una función* $a : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ *continua en su dominio. La familia de todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{1}$$

forman un subespacio vectorial de dimensión uno del conjunto $C(t_1, t_2)$ *(el conjunto de todas las funciones continuas sobre el intervalo* (t_1, t_2)*).*

Además para todo punto $(t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times \mathbb{R}$ *existe una única solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

cuyo dominio es todo el intervalo (t_0, t_1)*.*

Demostración: Si tomamos x_1 y x_2 dos soluciones de la ecuación (1) y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (\, \lambda x_1(t) + x_2(t)\,)' &= \lambda x_1'(t) + x_2'(t) \\ = \lambda a(t)x_1(t) + a(t)x_2(t) &= a(t)\,(\, \lambda x_1(t) + x_2(t)\,). \end{aligned}$$

De lo que se sigue que también $\lambda x_1(t) + x_2(t)$ es una solución de la ecuación (1). Esto prueba que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial forma un espacio vectorial.

Por otro lado, separando variables tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds &= \int_{t_0}^{t} a(s)ds \\ \Longleftrightarrow \log|\frac{x(t)}{x(t_0)}| &= \int_{t_0}^{t} a(s)ds \end{aligned}$$

y despejando deducimos que

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Ahora como $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ es una solución de (1) de modo que toma el valor 1 para el valor de la variable $t = t_0$, cualquier otra solución de la ecuación es un múltiplo de ésta. Por tanto toda solución esta definida en todo (t_1, t_2) ($a(t)$ es continua en (t_1, t_2)) y una base del conjunto de soluciones de la ecuación (1) tiene un único elemento $\square$

El caso no homogéneo.

La siguiente Proposición nos dice como es la estructura del conjunto de soluciones de una E.D.O. lineal no homogénea.

Proposición 1. *Sean dos funciones $a, b : (t_1, t_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en su dominio. Consideramos la ecuación diferencial lineal de primer orden* ***no homogénea***

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t). \qquad (1)$$

Si y_0 es una solución de la ecuación (1) y V es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea ***asociada*** *($x'(t) = a(t)x(t)$), entonces V' el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) se puede describir como*

$$V' = \{y_0(t) + x(t) : x \in V\}.$$

Demostración:

1. Veamos que $\{y_0(t) + x(t) : x \in V\} \subset V'$.

$$(y_0(t) + x(t))' = y_0'(t) + x'(t)$$
$$= a(t)y_0(t) + b(t) + a(t)x(t) = a(t)(y_0(t) + x(t)) + b(t),$$

   lo que prueba que $y_0(t) + x(t) \in V'$ para toda función $x \in V$.
2. Ahora veamos que $V' \subset \{y_0(t) + x(t) : x \in V\}$. Tomemos $y \in V'$ y definimos $x(t) = y(t) - y_0(t)$. Claramente $y(t) = y_0(t) + x(t)$. Si vemos que $x \in V$, entonces $y \in \{y_0(t) + x(t) : x \in V\}$. Veámoslo,

$$(y(t) - y_0(t))' = y'(t) - y_0'(t)$$
$$= a(t)y(t) + b(t) - a(t)y_0(t) - b(t) = a(t)(y(t) - y_0(t))$$

   Luego $x \in V$ $\square$

De la Proposición anterior se deduce que si somos capaces de encontrar una solución de la ecuación no homogénea (1) (**solución singular**), entonces cualquier otra solución viene dada como la suma de esta solución con otra solución del problema homogéneo (este último problema ya sabemos resolverlo). Un método para encontrar una **solución singular** de una ecuación no homogénea es él que vemos a continuación.

Método de la variación de las constante o de Lagrange.

Dada la ecuación no homogénea

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad (1)$$

consideramos una solución de este problema del tipo

$$y_0(t) = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds},$$

donde $c(t)$ es una función que tenemos que determinar y donde $e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Si suponemos que y_0 es una solución de (1) tiene que ocurrir que

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= c'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + c(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \\ &= a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t). \end{aligned}$$

Despejando se tiene que

$$c'(t) = b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

y por tanto

$$c(t) = \int b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}dt.$$

Así la solución singular y_0 se escribe como

$$y_0(t) = \left(\int b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}dt\right) e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Ahora la Proposición anterior nos dice que la **solución general** de la ecuación (1), o lo que es lo mismo, cualquiera de las soluciones de (1) se pueden escribir como

$$y(y) = y_0(t) + x(t) \qquad \text{para toda} \qquad x \in V$$

$$\iff y(t) = \left(\int b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}dt\right) e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + K\, e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \qquad \forall K \in \mathbb{R}.$$

La fórmula anterior es difícil de recordar. Lo que importa es el **procedimiento**. Como vamos a ver en los siguientes ejemplos, no usaremos las fórmulas halladas sino los procedimientos para encontrarlas.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`