AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EJEMPLOS

Ejemplo 1. *Vamos a resolver el problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{r} x'(t) = tx(t) + t \\ x(0) = 36. \end{array} \right. \tag{1}$$

La ecuación diferencial es lineal de primer orden no homogénea.

Solución general de la ecuación homogénea asociada. Consideramos la ecuación homogénea asociada $x'(t) = tx(t)$ y vamos a encontrar sus soluciones. Separamos variables

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = t.$$

Integramos

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int t dt$$

$$\Longleftrightarrow \log |x(t)| = \frac{t^2}{2} + K, \text{ donde } K \in \mathbb{R}$$

y ahora despejando

$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}} \text{ donde } C \in \mathbb{R};$$

al variar C en $\mathbb{R}$ se obtiene todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea.

Cálculo de una solución particular. Vamos a encontrar una solución del problema (1). En este caso particular se puede observar que la función constantemente igual a -1, $y_0 = -1$, es una solución del problema no homogéneo. De forma general se puede usar el método de variación de las constantes. Así probamos una solución del tipo

$$y_0(t) = C(t)e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Derivando y suponiendo que verifica la ecuación

$$y_0'(t) = C'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + C(t)te^{\frac{t^2}{2}} = tC(t)e^{\frac{t^2}{2}} + t$$

despejando la función C e integrando

$$C'(t) = te^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{y así} \qquad C(t) = \int te^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Luego $y_0(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} = -1$.

Solución general de la ecuación no homogénea (1). Esta solución es

$$y(t) = -1 + Ce^{\frac{t^2}{2}} \text{ donde } C \in \mathbb{R};$$

al variar C en $\mathbb{R}$ se obtiene todas las soluciones de la ecuación lineal no homogénea.

Solución que verifica la condición inicial. Buscamos una solución de (1) de modo que $y(0) = 36$, es decir que

$$-1 + Ce^{0/2} = 36 \qquad \text{despejando} \qquad C = 37.$$

Así la solución única del problema de Cauchy (1) es la función

$$y(t) = -1 + 37e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Ejemplo 2. *Vamos a resolver el problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = \tan(t)x(t) + \cos t \\ x(0) = 1. \end{array} \right. \tag{1}$$

La ecuación diferencial es lineal de primer orden no homogénea.

Solución general de la ecuación homogénes asociada. Consideramos la ecuación homogénea asociada $x'(t) = \tan(t)x(t)$ y vamos a encontrar sus soluciones. Separamos variables

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}.$$

Integramos

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt$$
$$\Rightarrow \log x(t) = -\log(\cos t),$$

y ahora despejando

$$x(t) = e^{-\log(\cos t))} = \frac{1}{\cos t}.$$

Esta es una solución no nula de la ecuación homogénea, luego cualquier otra solución será una combinación lineal suya, es decir

$$x(t) = \frac{K}{\cos t}, \qquad \text{donde} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Observemos que el dominio de estas soluciones es $\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\}$. Que es el dominio de la función $\tan t$.

Cálculo de una solución particular. De forma general, si usamos el método de variación de las constantes, y así suponemos que

$$y_0(t) = \frac{K(t)}{\cos t},$$

es una solución particular. Derivando y suponiendo que verifica la ecuación

$$y_0'(t) = \frac{K'(t)\cos t + K(t)\,\mathrm{sen}\, t}{\cos^2 t} = (\tan t)\frac{K(t)}{\cos t} + \cos t = \frac{K(t)\,\mathrm{sen}\, t}{\cos^2 t} + \cos t.$$

Despejando la función K e integrando

$$K'(t) = \cos^2 t \quad \text{y así} \quad K(t) = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 2t}{4}.$$

Luego $y_0(t) = \dfrac{2t + \mathrm{sen}\, 2t}{4\cos t}$.

Solución general de la ecuación no homogénea (1). Esta solución es

$$y(t) = \frac{2t + \mathrm{sen}\, 2t}{4\cos t} + \frac{K}{\cos t} \;\; \text{donde} \;\; K \in \mathbb{R};$$

al variar K en $\mathbb{R}$ se obtiene todas las soluciones de la ecuación lineal no homogénea.

Solución que verifica la condición inicial. Buscamos una solución de (1) de modo que $y(0) = 1$, es decir que

$$\frac{2 \times 0 + \mathrm{sen}(2 \times 0)}{4\cos 0} + \frac{K}{\cos 0} = K = 1.$$

Así la solución única del problema de Cauchy (1) es la función

$$y(t) = \frac{2t + \mathrm{sen}\, 2t}{4\cos t} + \frac{1}{\cos t}.$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es