AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

E.D.O. LINEAL DE SEGUNDO ORDEN. GENERALIDADES.

Definición 1. *Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A la ecuación diferencial*

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \qquad (1)$$

se le llama E.D.O. ***lineal de segundo orden no homogénea de coeficientes constantes****. A la ecuación diferencial* ***homogénea asociada***

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0 \qquad (2)$$

se le llama E.D.O. ***lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes****.*

Observación 1. **a:** *La ecuación diferencial $x''(t) = \dfrac{x'^2(t) \operatorname{sen} x(t)}{x^2(t) + 1}$ es un ejemplo de E.D.O. de segundo orden que* ***no*** *es lineal.*

b: *La ecuación $x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t) = f(t)$ es un ejemplo de E.D.O. lineal de segundo orden con coeficientes* ***no*** *constantes. Tanto el Teorema como la Proposición que siguen son válidos para este tipo de ecuaciones y son la justificación del apelativo* ***lineal****.*

c: *Nos vamos a restringir a dar las soluciones de los tipos (1) y (2) (es decir E.D.O. lineales de* ***coeficientes constantes****). En el resto de los casos lineales encontrar soluciones explícitas puede no ser posible. Además nuestro interés por estas ecuaciones es que son el modelo de los circuitos* ***RLC****.*

d: *Se puede probar un **Teroema de Existencia y Unicidad** para el problema de Cauchy general*

$$(3) \qquad \begin{cases} x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0, \;\; x'(0) = x'_0 \end{cases}$$

donde f es una función continua. Es decir, el probleam (3) tiene una única solución definida en todo el dominio de la función f. No vamos a ver este Teorema en toda su extensión, pero si muchas de sus afirmaciones.

En los **CASOS LINEALES** siempre se procede de la misma manera, como vimos en las E.D.O de primer orden. Primero se resuelve el caso homogéneo asociado y después el problema general. De forma sistemática.

Observación 2. *Para resolver el problema (1) se procede*

1. *resolviendo el **problema homogéneo asociado** (2);*
2. *encontrando una **solución particular** del problema (1);*
3. *la suma de las soluciones halladas en 1) y 2) es la **solución general** del problema (1).*

Los dos siguientes resultados, como en el caso de la E.D.O. de primer orden, justifican el proceso anterior de resolución tanto como el apelativo **lineal** de estas ecuaciones. Después de estos resultados, veremos los métodos concretos para proceder en 1. (cálculo de la solución general del problema homogéneo) y 2. (cálculo de la solución particular del problema no homogéneo).

Teorema 1. *El conjunto S de todas las soluciones del problema homogéneo*

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0 \qquad (2)$$

es un subespacio vectorial del conjuntos de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Demostración: Más adelante veremos que las soluciones de (2) están definidas en todo $\mathbb{R}$. Obviamente son continuas por ser derivables. Ahora, sean $x, y \in S$ y se $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que la función $\lambda x(t) + y(t)$

es también una solución de (2). Usando las propiedades de la derivada tenemos que

$$\begin{aligned}&(\lambda x(t) + y(t))'' + a_1(\lambda x(t) + y(t))' + a_2(\lambda x(t) + y(t))\\ &= \lambda x''(t) + y''(t) + a_1(\lambda x'(t) + y'(t)) + a_2(\lambda x(t) + y(t))\end{aligned}$$

desarrollando y reordenando

$$= \lambda(x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t)) + y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0.$$

Lo que prueba que $\lambda x(t) + y(t)$ es también una solución de (2)$\square$

Cuando resolvamos explícitamente la ecuación (2) veremos que el espacio vectorial S tiene dimensión 2.

Proposición 1. *Sea S' el conjunto de soluciones de la ecuación no homogénea*

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t) \qquad (1).$$

*Consideremos y_0 una solución del problema (1) (**solución particular**). Si S es el conjuto de soluciones de la ecuación homogénea asociada*

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = 0 \qquad (2),$$

entonces

$$S' = \{y_0(t) + x(t) : x \in S\}.$$

Demostración: Si $x \in S$, entonces

$$\begin{aligned}&(x(t) + y_0(t))'' + a_1(x(t) + y(t)_0)' + a_2(x(t) + y(t)_0)\\ &= x''(t) + y_0''(t) + a_1(x'(t) + y_0'(t)) + a_2(x(t) + y_0(t))\end{aligned}$$

desarrollando y reordenando

$$= (x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t)) + y_0''(t) + a_1y_0'(t) + a_2y_0(t) = 0 + f(t).$$

Lo que prueba que $x(t) + y_0(t)$ es también una solución de (1).

Por otro lado, si $y \in S'$, consideramos $x(t) = y(t) - y_0(t)$. Claramente $y = x + y_0$. Solo nos queda ver que $x \in S$ para terminar la prueba. Veámoslo.

$$\begin{aligned}&(y(t) - y_0(t))'' + a_1(y(t) - y_0(t))' + a_2(y(t) - y_0(t))\\ &= \lambda y''(t) - y_0''(t) + a_1(y'(t) - y_0'(t)) + a_2(y(t) - y_0(t))\end{aligned}$$

desarrollando y reordenando

$$= (y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t))-(y_0''(t)+a_1y_0'(t)+a_2y_0(t)) = f(t)-f(t) = 0\square$$

Los dos resultados anteriores son también ciertos si consideramos $a_1(t)$ y $a_2(t)$ funciones en lugar de constantes.

A continuación vamos a dar técnicas explícitas para resolver los casos homogéneos y para encontrar una solución particular del caso no homogéneo.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`