SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Definición 1. *Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y la E.D.O. lineal de segundo orden homogénea de coeficientes constantes*

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = 0 \qquad (2).$$

a: *Se define el **polinomio característico** de la ecuación diferencial (2) por*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2.$$

b: *Se llama **ecuación característica** de la ecuación diferencial (2) a la ecuación*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Observemos que las soluciones de una ecuación característica vienen dadas por la expresión

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$

así puede ocurrir que las dos soluciones que salen λ_1 y λ_2 sean

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 = \lambda_2$, o que
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Las soluciones de la ecuación característica nos van a determinar las soluciones de la ecuación diferencial (2) como se ve en el siguiente Teorema.

Teorema 1. *De una E.D.O. lineal de segundo orden homogénea*

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = 0 \qquad (2)$$

consideramos λ_1 y λ_2 las dos soluciones de su ecuación característica. Entonces

1. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ son dos soluciones de la ecuación (2) que forman una base del conjunto S de todas las soluciones.*
2. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 = \lambda_2$, las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $te^{\lambda_1 t}$ son dos soluciones de la ecuación (2) que forman una base del conjunto S de todas las soluciones.*
3. *Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, las funciones $e^{\alpha t}\cos\beta t$ y $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ son dos soluciones de la ecuación (2) que forman una base del conjunto S de todas las soluciones.*

Demostración:

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ **con** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, en este caso veamos que $e^{\lambda t}$ es solución de (2) cuando λ es una solución de la ecuación característica. Sea

$$x(t) = e^{\lambda t}, \qquad x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad \text{y} \qquad x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

entrando con estos datos en la ecuación diferencial y dado que λ es una solución de la ecuación característica tenemos que

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda t} = 0.$$

Luego las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ son dos soluciones de la ecuación (2) . Veamos ahora que cualquier otra solución y es combinación lineal de estas dos. Es decir, queremos escribir

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

y por tanto

$$y'(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Por otro lado las función y tomará ciertos valores $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. De aquí tenemos el sistema lineal

$$\begin{array}{ccccccccc} y_0 & = & Ae^{0\lambda_1} & + & Be^{0\lambda_2} & = & A & + & B \\ y_0' & = & A\lambda_1 e^{0\lambda_1} & + & B\lambda_2 e^{0\lambda_2} & = & A\lambda_1 & + & B\lambda_2 \end{array}$$

Sistema que tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Ahora tenemos que echar mano del **Teorema de Existencia y Unicidad** de soluciones del problema de Cauchy (que enunciamos, pero no hemos probado en su totalidad) para terminar la prueba. Tanto y como $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ son dos soluciones de (2) que verifican las mismas dos condiciones iniciales, luego por el Teorema de Unicidad han de ser iguales.

Los casos 2) y 3) se prueban de la misma forma aunque con un poco de mayor complejidad técnica. También en estos caso hay que echar mano de la unicidad de soluciones del problema de Cauchy.

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ **con** $\lambda_1 = \lambda_2$, solo nos queda ver que

$$x(t) = te^{\lambda_1 t}, \qquad x'(t) = e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1 e^{\lambda_1 t} \qquad \text{y} \qquad x''(t) = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$$

es solución de (2). Metiendo esta función en la ecuación queda que

$$\begin{aligned} &2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a_1(e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1 e^{\lambda_1 t}) + a_2 te^{\lambda_1 t} \\ &= te^{\lambda_1 t}(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + e^{\lambda_1 t}(2\lambda_1 + a_1) = 0, \end{aligned}$$

ya que $(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) = 0$ por ser λ_1 raíz de la ecuación característica. Pero además λ_1 es una raiz doble, lo que implica que $(\lambda - \lambda_1)^2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ y de aquí se deduce que $2\lambda_1 + a_1 = 0$.

Por otro lado si y es una solución de la ecuación con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$ y tratamos de escribirla como

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t},$$

por tanto

$$y'(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_1 t} + Bt\lambda_1 e^{\lambda_1 t};$$

sustituyendo t por 0 tenemos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcl} y_0 & = & A \\ y_0' & = & A\lambda_1 \ + \ B. \end{array}$$

Este sistema tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto A y B están univocamente determinadas. Ahora, tanto y como $Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$ son dos soluciones de (2) que verifican las mismas dos condiciones iniciales, luego por el Teorema de Unicidad han de ser iguales. Y resolviendo el sistema

$$y(t) = y_0 e^{\lambda_1 t} + (y_0' - \lambda_1 y_0)te^{\lambda_1 t}.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ **con** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ **y** $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, en primer lugar veamos que las funciones $e^{\alpha t}\cos\beta t$ y $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ son dos soluciones de la ecuación (2).

- $x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$
- $x'(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$
- $x''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}\cos\beta t - 2\alpha\beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t - \beta^2 e^{\alpha t}\cos\beta t.$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación diferencial tenemos que

$$\begin{aligned} &\alpha^2 e^{\alpha t}\cos\beta t - 2\alpha\beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t - \beta^2 e^{\alpha t}\cos\beta t + a_1(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t) \\ &+ a_2 e^{\alpha t}\cos\beta t = e^{\alpha t}\cos\beta t(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2) + e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t(-2\alpha\beta - a_1\beta) = 0, \end{aligned}$$

ya que $(\lambda - \alpha - \beta i)(\lambda - \alpha + \beta i) = \lambda^2 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2$ y a su vez es igual a $(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2)$; luego $a_1 = -2\alpha$ y $a_2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Así vemos que $e^{\alpha t}\cos\beta t$ es una solución de (2).

Para ver que $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ es solución de (2) se procede de la misma manera.

Ahora si y es una solución de la ecuación con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$ y tratamos de escribirla como

$$y(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t,$$

por tanto

$$y'(t) = A(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t) + B(\alpha e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t);$$

sustituyendo t por 0 tenemos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcl} y_0 & = & A & & \\ y'_0 & = & A\alpha & + & B\beta. \end{array}$$

Este sistema tiene solución única ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0.$$

Por tanto A y B están univocamente determinadas. Ahora, tanto y como $Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ son dos soluciones de (2) que verifican las mismas dos condiciones iniciales, luego por el Teorema de Unicidad han de ser iguales. Y resolviendo el sistema

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}\cos\beta t + \left(\frac{y'_0 - \alpha y_0}{\beta}\right) e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \square$$

EJEMPLOS.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2 \end{cases}$$

Solución: La ecuación característica es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ cuyas dos soluciones son $\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$. Luego $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Dos raíces reales distintas. La **solución general** de esta ecuación diferencial es

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{3t} \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

La única **solución particular** de la ecuación que verifica $y(1) = e^2$ e $y'(1) = 3e^2$, tiene que cumplir que

$$\begin{array}{rcrcl} y(1) = e^2 & = & Ae^2 & + & Be^3 \\ y'(1) = 3e^2 & = & 2Ae^2 & + & 3Be^3. \end{array}$$

Resolviendo este sistema (usando la regla de Cramer en este caso) tenemos que

$$y(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^2 & e^3 \\ 3e^2 & 3e^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^2 & e^3 \\ 2e^2 & 3e^3 \end{vmatrix}} e^{2t} + \frac{\begin{vmatrix} e^2 & e^2 \\ 2e^2 & 3e^2 \end{vmatrix}}{e^2 e^3} e^{3t} = \frac{e^2}{e^3} e^{3t} = e^{3t-1}.$$

Ejemplo 2.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Solución: La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$. Luego $\lambda = -1$ es una raíz real doble. La **solución general** de esta ecuación diferencial es

$$y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.

$$\begin{cases} 2y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: La ecuación característica es $2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ cuyas dos soluciones son $\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{4}$. Luego $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}i$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}i$. Dos raíces complejas conjugadas. La **solución general** de esta ecuación diferencial es

$$y(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{5}t) + Be^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{5}t) \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Así

$$\begin{aligned} y'(t) = & -\frac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{5}t) - \frac{1}{2}\sqrt{5}Ae^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{5}t) \\ & -\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{5}t) + \frac{1}{2}\sqrt{5}Be^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{5}t). \end{aligned}$$

La única **solución particular** de la ecuación que verifica $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, tiene que cumplir que

$$\begin{array}{rcl} y(0) = 0 & = & A \\ y'(0) = 1 & = & -\frac{1}{2}A \;+\; \frac{1}{2}\sqrt{5}B. \end{array}$$

Resolviendo este sistema, $A = 0$ y $B = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Y por tanto la solución del problema de Cauchy es

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{5}t).$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es