AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EL OSCILADOR ARMÓNICO

Si consideramos un circuito LC, es decir un circuito RLC donde $R = 0$ (sin resistencia),

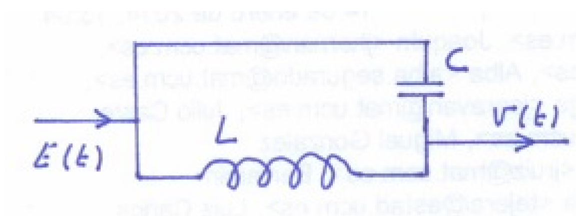

FIGURA 1. Circuito LC

la E.D.O. que lo modeliza es de la forma

$$E(t) = CLv''(t) + v(t) \qquad (\textbf{Oscilador armónico}).$$

Vamos a resolver la ecuacón homogénea asociada

$$CLv''(t) + v(t) = 0.$$

La ecuación característica es $CL\lambda^2 + 1 = 0$ donde C y L son constantes positivas. Así las dos soluciones de esta ecuación son complejas conjugadas

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{CL}}i$$

y la solución general de la ecuación diferencial es

$$v(t) = A\cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t) + B\,\mathrm{sen}(\frac{1}{\sqrt{CL}}t) \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Transformemos un poco esta solución.

$$v(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,\mathrm{sen}(\frac{1}{\sqrt{CL}}t)\right)$$

Podemos encontrar un ángulo $-\alpha \in [0, 2\pi]$

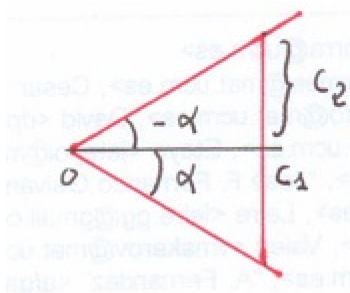

FIGURA 2

de modo que

$$\cos -\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} -\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Luego nuestra solución se puede escribir (teniendo en cuenta también que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$) como

$$\begin{aligned} v(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos -\alpha \cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t) - \operatorname{sen} -\alpha \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{CL}}t)\right) \\ = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t - \alpha). \end{aligned}$$

Vemos pués que la señal de salida v tine una frecuencia de $\frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$. Estamos ante la base matemática de la llamada **modulación en frecuencia**.

En el caso en el que la señal de entrada $E(t) = K$ es constante, entonces $v_0 = K$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $E(t) = CLv''(t) + v(t)$ y la solución general de ésta es

$$v(t) = K + \sqrt{A^2+B^2}\cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t - \alpha) \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Todas las soluciones son $2\pi\sqrt{CL}$-periódicas.

Observación 1. *Al describir el circuito RLC vimos que* $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)$. *Derivando en la señal de salida de un circuito LC con entrada constante*

$$v'(t) = \sqrt{A^2+B^2}\frac{-1}{\sqrt{CL}}\cos(\frac{1}{\sqrt{CL}}t - \alpha) = \frac{1}{C}I(t).$$

Luego la intensidad de sálida I *de un circuito LC con entrada constante tiene una frecuencia fija* $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es