EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

Dada la E.D.O. lineal de segundo orden **no** homogénea

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = g(t) \qquad (1),$$

y dadas dos **soluciones** x_1 y x_2 de la ecuación lineal homogénea asociada, se puede intentar encontrar una **solución particular** de la ecuación no homogénea (1) probando una función del tipo

$$y(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) \qquad (*)$$

donde u_1 y u_2 son funciones por determinar. Veamos como hacerlo.

Observación 1.

- a_1 y a_2 pueden ser funciones continuas o constantes.
- Supondremos que

  $$u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) = 0 \qquad (**)$$

  por cuestiones técnicas que enseguida van a aparecer.

En la ecuación (1) tenemos que meter una candidata a solución del tipo $(*)$, es decir

$$y(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t),$$

por $(**)$ tendremos que

$$\begin{aligned} y'(t) &= u_1'(t)x_1(t) + u_2'(t)x_2(t) + u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t) \\ &= u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t) \end{aligned}$$

y así

$$y''(t) = u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) + u_1(t)x_1''(t) + u_2(t)x_2''(t).$$

Introduciendo la función y y sus derivadas en la ecuación (1) tenemos que

$$\begin{aligned} g(t) &= a_2(t)\left(u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)\right) \\ &+a_1(t)\left(u_1(t)x_1'(t) + u_2(t)x_2'(t)\right) \\ &+u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t) + u_1(t)x_1''(t) + u_2(t)x_2''(t) \\ &= u_1(t)\left(x_1''(t) + a_1(t)x_1'(t) + a_2(t)x_1(t)\right) \\ &+u_2(t)\left(x_2''(t) + a_1(t)x_2'(t) + a_2(t)x_2(t)\right) \\ &+u_1'(t)x_1'(t) + u_2'(t)x_2'(t). \end{aligned}$$

Como x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación homogénea y por $(**)$ tenemos el sistema lineal con incógnitas u_1' y u_2'

$$(***)\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1(t)u_1'(t) & + & x_2(t)u_2'(t) & = & 0 \\ x_1'(t)u_1'(t) & + & x_2'(t)u_2'(t) & = & g(t). \end{array} \right.$$

Vamos a hacer algunas observaciones antes de seguir.

Definición 1. *Dadas dos funciones cualesquiera x_1 y x_2 se llama Wroskiano de ambas funciones (y se denota por $W[x_1,x_2]$) a la función*

$$W[x_1,x_2] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Ahora, parece claro que de la relación de la dependencia lineal con los determinantes se tiene que

Proposición 1. *Dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0$ son linealmente independientes si y solo si la función Wroskiana es no nula ($W[x_1,x_2]\neq 0$).*

Volviendo a nuestro sistema lineal $(***)$, este tendrá solución si $W[x_1,x_2]\neq 0$ y usando la regla de Cramer tendremos que

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ g(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]} \qquad \text{y} \qquad u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W[x_1,x_2]}.$$

Integrando

$$u_1(t) = \int_r^t \frac{-x_2(s)g(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}ds \qquad \text{y} \qquad u_2(t) = \int_r^t \frac{x_1(s)g(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}ds.$$

Para que estas integrales existan será suficiente con que las funciones x_1, x_2 y g sean continuas (o que simplemente lo sean a trozos). Estas dos últimas fórmulas permiten hallar las funciones u_1 y u_2 y por tanto una **solución particular** del problema (1).

Veamos ahora un par de ejemplos del uso del método de variación de las constantes.

Ejemplo 1. *Dada la ecuación $y''-4y'+4y = 2e^{2t}+\frac{t}{2}$, vamos a encontar una solución general de esta ecuación no homogénea. Este problema está resuelto anteriormente por otros métodos.*

Solución: La ecuación homogénea asociada es $y''-4y'+4y=0$, con ecuación característica $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$. Por tanto $x_1(t)=e^{2t}$ y $x_2(t)=te^{2t}$ forman una base del conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea. Además

$$W[e^{2t},te^{2t}] = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}\neq 0.$$

Una solución particular de la ecuación vendrá dada por una función del tipo $y(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)te^{2t}$ donde

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{-se^{2s}(2e^{2s} + \frac{s}{2})}{e^{4s}} ds \qquad \text{y} \qquad u_2(t) = \int_0^t \frac{e^{2s}(2e^{2s} + \frac{s}{2})}{e^{4s}} ds.$$

Vamos a resolver estas integrales.

- $$u_1(t) = \int_0^t \frac{-se^{2s}(2e^{2s} + \frac{s}{2})}{e^{4s}} ds = \int_0^t -2s ds + \int_0^t -\frac{s^2}{2e^{2s}} ds$$

  - $\displaystyle\int_0^t -2s ds = -s^2 \Big|_0^t = -t^2$
  - Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_0^t -\frac{s^2}{2}e^{-2s} ds &= \frac{1}{4}s^2e^{-2s} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{s}{2}e^{-2s} ds = \frac{1}{4}t^2e^{-2t} - \int_0^t \frac{s}{2}e^{-2s} ds \\ &= \frac{1}{4}t^2e^{-2t} - \left[-\frac{1}{4}se^{-2s} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{4}e^{-2s} ds \right] \\ &= \frac{1}{4}t^2e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}.\end{aligned}$$

- $$u_2(t) = \int_0^t \frac{e^{2s}(2e^{2s} + \frac{s}{2})}{e^{4s}} ds = \int_0^t 2 ds + \int_0^t \frac{s}{2e^{2s}} ds = 2t - \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-2t}.$$

Así la solución particular buscada es

$$\begin{aligned}y(t) &= (-t^2 + \frac{1}{4}t^2e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-2t})e^{2t} + (2t - \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-2t})te^{2t} \\ &= -t^2e^{2t} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} + 2t^2e^{2t} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t = t^2e^{2t} + \frac{t}{8} + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Observemos que es la misma solución que ya habíamos obtenido antes.

Luego la solución general de nuestro problema (1) es

$$x(t) = t^2e^{2t} + \frac{t}{8} + \frac{1}{8} + Ae^{2t} + Bte^{2t} \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2. *Resolvamos el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} 2y'' - y' + 2y = e^{4x} \\ y(0) = 3, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Solución: La ecuación característica es $2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} i,$$

de lo que se sigue que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y(t) = Ae^{\frac{1}{4}x} \cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + Be^{\frac{1}{4}x} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ahora vamos a intentar una solución particular del tipo

$$y_0 = Ke^{4x} \qquad y_0' = 4Ke^{4x} \qquad \text{e} \qquad y_0'' = 16Ke^{4x}$$

(observemos que $a = 4$ no es raíz de la ecuación característica). Entrando en la ecuación con y_0 tenemos que

$$32Ke^{4x} - 4Ke^{4x} + 2Ke^{4x} = 30Ke^{4x} = e^{4x}$$

luego $K = \frac{1}{30}$, y la solución general del problema es

$$y(t) = \frac{1}{30}e^{4x} + Ae^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + Be^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \qquad \text{donde} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Además

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{2}{15}e^{4x} + \frac{1}{4}Ae^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) - \frac{\sqrt{15}}{4}Ae^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \\ +\frac{1}{4}Be^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + \frac{\sqrt{15}}{4}Be^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{15}e^{4x} + (\frac{1}{4}A + \frac{\sqrt{15}}{4}B)e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + (\frac{1}{4}B - \frac{\sqrt{15}}{4}A)e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x).$$

Para resolver el problema de Cauchy, introducimos las condiciones iniciales y llegamos al sistema lineal

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{30} + A = 3 \\ \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{4}A + \tfrac{\sqrt{15}}{4}B = 2 \end{aligned}$$

Lo único que queda por hacer es resolver este fácil sistema para hallar la única solución del problema de Cauchy propuesto.

Variación de las constantes. Vamos a intentar cálcular la solución particular del problema anterior usando el método de variación de las constante. En primer lugar tendremos que hallar el Wronskiano de las funciones $y_1(x) = e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x)$ y $y_2(x) = e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x)$.

$$W[y_1, y_2]$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) & e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \\ \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) - \frac{\sqrt{15}}{4}e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) & \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + \frac{\sqrt{15}}{4}e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{1}{2}x}\left[\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x)\frac{1}{4}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + \frac{\sqrt{15}}{4}\cos^2(\frac{\sqrt{15}}{4}x)\right] \\ &-e^{\frac{1}{2}x}\left[\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x)\frac{1}{4}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x) - \frac{\sqrt{15}}{4}\operatorname{sen}^2(\frac{\sqrt{15}}{4}x)\right] \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4}e^{\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Así la solución particular buscada será de la forma

$$y_0(x) = u_1(x)e^{\frac{1}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}x) + u_2(x)e^{\frac{1}{4}x}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}x)$$

donde

$$u_1(x) = \int_0^t \frac{-e^{4s}e^{\frac{1}{4}s}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}}{4}s)}{\frac{\sqrt{15}}{4}e^{\frac{1}{2}s}}ds \qquad \text{y} \qquad u_2(x) = \int_0^t \frac{e^{4s}e^{\frac{1}{4}s}\cos(\frac{\sqrt{15}}{4}s)}{\frac{\sqrt{15}}{4}e^{\frac{1}{2}s}}ds.$$

Estas dos integrales podrían resolverse por partes, pero en todo caso esta elección de método (en este caso el de variación de las constantes) parece significativamente más complicada que la anterior (de ensayar cierto tipo de función).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`