

## APLICACIÓN: EL CIRCUITO RLC.

Al comienzo del tema de las E.D.O lineales de segundo orden hemos visto como estas ecuaciones sirven para modelizar distintos sistemas físicos. En concreto el circuito RLC.

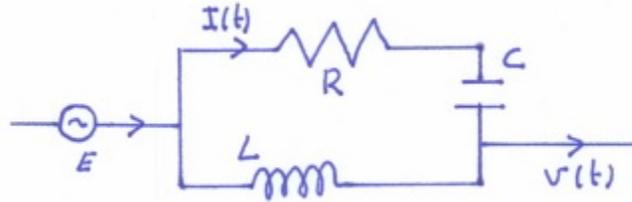


FIGURA 1. Circuito RLC

En un circuito **RLC**, con una resistencia **R**, una inductancia **L** y un condensador **C**, veámos que al entrar una corriente  $E(t)$ , que depende del tiempo, sale otra corriente  $v(t)$  que será una modificación de la corriente de entrada dependiendo de **R**, **L** y **C**.

Según la **ley de Kirchhoff**, una corriente en un circuito cerrado presenta una suma algebraica de las caídas de **voltaje** igual a cero. Esta ley se determina experimentalmente como las que se indican a continuación:

- $E(t)$  voltaje de entrada en el circuito.
- $V_R = -RI(t)$  la caída de voltaje en una resistencia depende de  $R$  y de la intensidad de la corriente  $I(t)$  (**ley de Ohm**).
- $V_L = -L \frac{dI(t)}{dt}$  caída de voltaje en el selenoide.
- $V_C = -\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s)ds$  caída de voltaje en el condensador.
- Además  $I = \frac{dq}{dt}$ , donde  $q$  es la carga eléctrica.

Así por la ley de Kirchhoff se tiene que

$$E(t) - L \frac{dI(t)}{dt} - RI(t) - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s)ds = 0.$$

O lo que es equivalente sustituyendo  $I$  por  $\frac{dq}{dt}$

$$E(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (1).$$

Tomando el voltaje por

- $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds$
- $v'(t) = \frac{1}{C} I(t)$  y
- $v''(t) = \frac{1}{C} \frac{dI(t)}{dt}$ ,

y ahora sustituyendo en la ecuación de arriba nos queda

$$E(t) = CLv''(t) + CRv'(t) + v(t) \quad (2).$$

Por último, si derivamos la ecuación anterior, como  $v'(t) = \frac{1}{C}I(t)$ , tenemos que

$$E'(t) = LI''(t) + RI'(t) + \frac{I(t)}{C} \quad (3).$$

Tenemos tres ecuaciones, todas E.D.O. lineales de segundo orden y coeficientes constantes, (1),(2) y (3) que describen el circuito. En cada una de ellas, nos fijamos en una magnitud distinta. Así en la primera consideramos la carga, en otra el voltaje y la última se fija en la intensidad de la corriente.

A continuación vamos a estudiar algunas propiedades de estos circuitos.

### CIRCUITO RL.

Vamos a considerar un circuito sin condensador y con una entrada de corriente constante  $E = v_e$ . Además suponemos una condición inicial  $I(0) = 0$ , es decir el circuito esta abierto antes de que empiece a fluir la corriente.

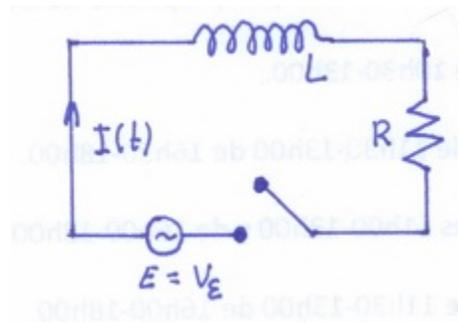


FIGURA 2. Circuito RL. E constante.

En este caso la ecuación (1) se convierte en el problema de Cauchy

$$\begin{cases} I'(t) = \frac{1}{L}(v_e - RI(t)) \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

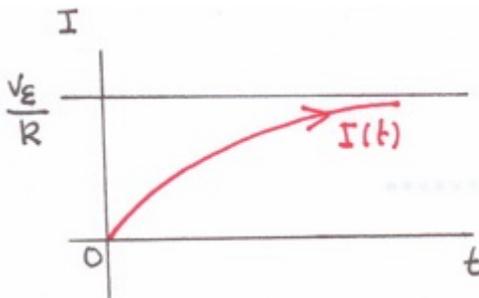
Tenemos en este caso una ecuación de primer orden. Integrando

$$\int_0^t \frac{I'}{-I + \frac{v_\epsilon}{R}} ds = \int_0^t \frac{R}{L} ds$$

$$\Leftrightarrow -\log\left(\frac{v_\epsilon}{R} - I\right) + \log\left(\frac{v_\epsilon}{R}\right) = \frac{R}{L}t$$

$$\Leftrightarrow \log\left(1 - I(t)\frac{R}{V_\epsilon}\right) = -\frac{R}{L}t.$$

Despejando tenemos que



$$I(t) = \frac{V_\epsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

La intensidad pasa de 0 a estabilizarse en el valor  $\frac{V_\epsilon}{R}$  cuando el tiempo  $t$  se hace grande.

Veamos ahora, en el mismo circuito, el efecto de cortar la corriente.

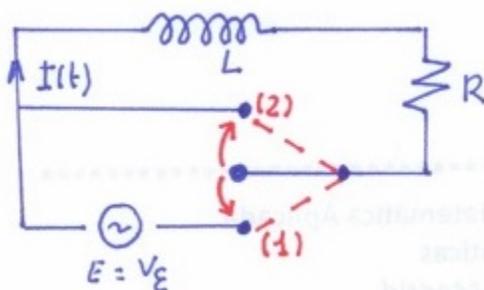


FIGURA 3. Circuito RL con interruptor.

Si el interruptor está en la posición 1), estamos en el caso anterior. En la posición 2) pasamos entonces a una situación descrita por el problema de Cauchy

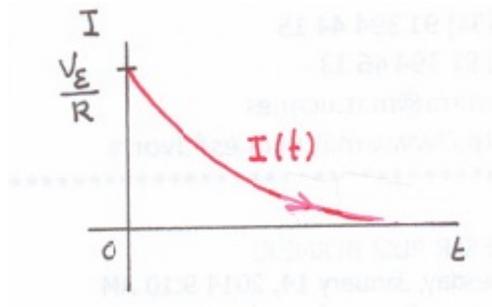
$$\begin{cases} I'(t) = -\frac{R}{L}I(t) \\ I(0) = \frac{V_\epsilon}{R} \end{cases}$$

Integrando

$$\int_0^t \frac{I'}{I} ds = \int_0^t -\frac{R}{L} ds \Leftrightarrow \log I(t) - \log\left(\frac{V_\epsilon}{R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

4

y despejando



$$I(t) = \frac{V_\epsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

La intensidad pasa de  $\frac{V_\epsilon}{R}$  a anularse, como era de esperar.

### CIRCUITO LC. OSCILADOR ARMÓNICO.

Si consideramos un circuito LC, con una corriente de entrada  $E$  constante, es decir un circuito RLC donde  $R = 0$  (sin resistencia) y  $E' = 0$ ,

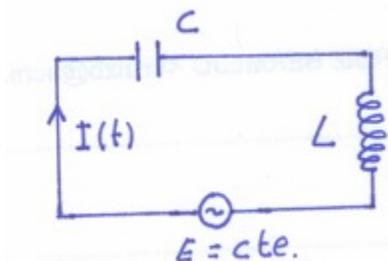


FIGURA 4. Circuito LC

la E.D.O. que lo modeliza, según la fórmula (3) en la intensidad, es de la forma

$$LI''(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0 \quad (\text{Oscilador armónico}).$$

Esta E.D.O. es lineal de segundo orden y homogénea. La ecuación característica es  $L\lambda^2 + \frac{1}{C} = 0$  donde  $C$  y  $L$  son constantes positivas. Así las dos soluciones de esta ecuación son complejas conjugadas

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{CL}}i = \pm w_0i$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son

$$I(t) = C_1 \cos(w_0t) + C_2 \sen(w_0t) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

todas son  $2\pi/w_0$ -periódicas. Transformemos un poco esta solución.

$$I(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(w_0t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sen(w_0t) \right)$$

Si llamamos  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , podemos encontrar un ángulo  $-\alpha \in [0, 2\pi]$

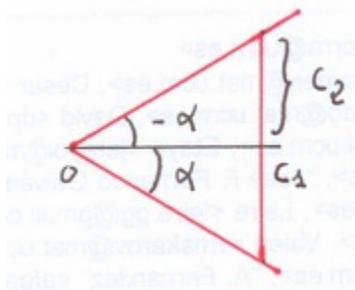


FIGURA 5

de modo que

$$\cos -\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen} -\alpha = \frac{-C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}.$$

Luego nuestra solución se puede escribir (teniendo en cuenta también que  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$ ) como

$$\begin{aligned} I(t) &= A (\cos(-\alpha) \cos(w_0 t) - \text{sen}(-\alpha) \text{sen}(w_0 t)) \\ &= A \cos(w_0 t - \alpha). \end{aligned}$$

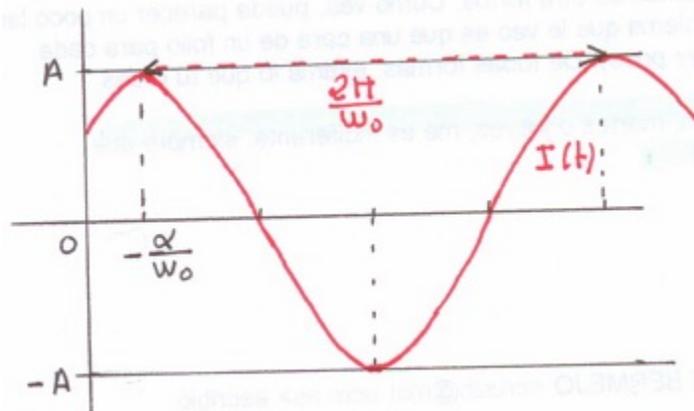


FIGURA 6. Salida de un Oscilador Armónico.

Vemos que la señal de salida  $I$  tiene una frecuencia de  $\frac{w_0}{2\pi}$  constante. Estamos ante la base matemática de la llamada **modulación en frecuencia**. También sirve para generar corrientes con frecuencia constante que usaremos, ahora un poco más adelante, en el llamado **efecto de resonancia**.

## CIRCUITO RLC COMPLETO CON ENTRADA CONSTANTE.

Vamos a estudiar ahora el circuito RLC completo con una entrada  $E$  constante. Comprobaremos que lo que se produce en la salida son **oscilaciones libres amortiguadas**.

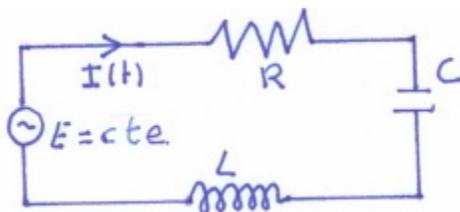


FIGURA 7. RLC completo. E constante.

Según la ecuación general del circuito (3), que vimos al principio, y dado que  $E'(t) = 0$ , ahora tendremos que estudiar la ecuación

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{I(t)}{C} = 0$$

Esta ecuación es una E.D.O. lineal de segundo orden homogénea cuya ecuación característica es

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

y cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2L}(-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2L}(-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}).$$

Las soluciones de la ecuación dependen del discriminante  $R^2 - \frac{4L}{C}$ . Así tendremos que

- si  $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$ , entonces  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  reales y distintas, luego

$$I(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Estas soluciones tendrán unas gráficas del tipo

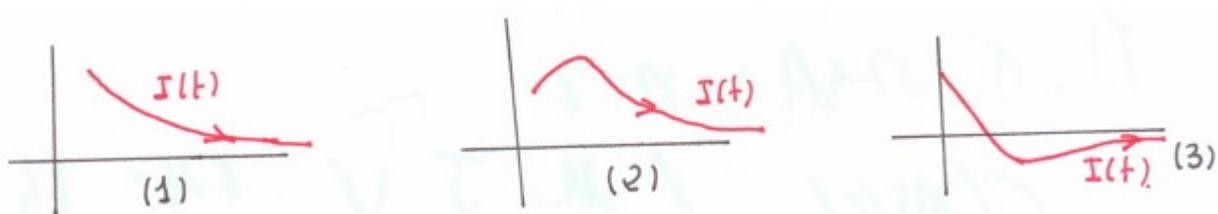


FIGURA 8. Corriente sobreamortiguada.

- Si  $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  reales e iguales, luego

$$I(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = (C_1 + t C_2) e^{\lambda_1 t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Observemos que en este caso también  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

- si  $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ , en este caso tenemos dos raíces complejas conjugadas

$$\lambda = -\frac{R}{LC} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} i.$$

Si notamos

$$\gamma = \frac{R}{LC} \quad \text{y} \quad w_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{w_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}},$$

entonces las soluciones en este caso son del tipo

$$I(t) = e^{-\gamma t} (C_1 \cos w_1 t + C_2 \sen w_1 t) = e^{-\gamma t} A \cos(w_1 t + \alpha)$$

donde  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  y  $-\alpha \in (0, 2\pi)$  verificando  $C_1 = A \cos \alpha$  y  $C_2 = A \sen(-\alpha)$ . La corriente de salida del circuito será de la forma

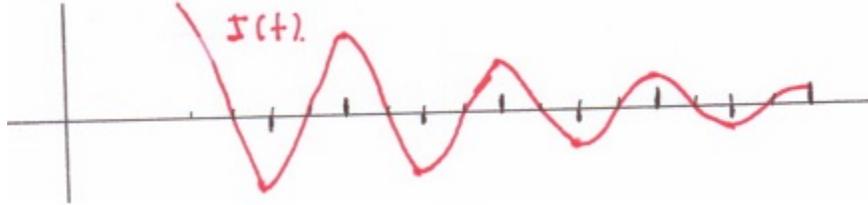


FIGURA 9. Corriente subamortiguada.

Observemos que la frecuencia de estas soluciones es igual a todas ellas,  $\frac{w_1}{2\pi}$ , aunque la amplitud se debilita con el tiempo.

### CIRCUITO RLC, CON ENTRADA NO CONSTANTE.

Como hemos visto anteriormente la **resistencia  $R$**  del circuito hace perder energía o amplitud a la intensidad hasta anularla. Vamos a introducir una diferencia de potencial  $E(t) = E_0 \text{sen } \omega t$  (este tipo de señales las produce el **oscilador armónico o circuito LC**), de modo que podamos compensar el efecto de la resistencia.

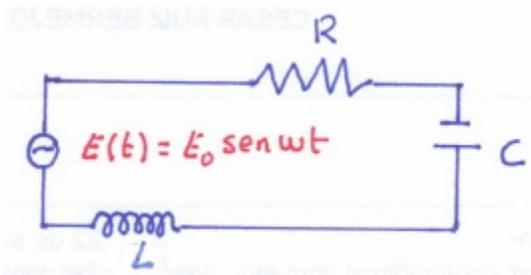


FIGURA 10. Circuito RLC,  $E(t) = E_0 \text{sen } \omega t$ .

La ecuación (3) adaptada a este caso ( $E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$ ) nos da la ecuación

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = F_0 \cos \omega t$$

La solución de este problema no homogéneo vendrá dada por la solución general de la ecuación homogénea  $x_h$  más una solución particular de la ecuación no homogénea  $x_p$ , así

$$I(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Como vimos en el apartado anterior

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \text{sen } \omega_1 t) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

donde

$$\gamma = \frac{R}{LC} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}},$$

y donde  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  y  $-\alpha \in (0, 2\pi)$  verificando  $C_1 = A \cos \alpha$  y  $C_2 = A \text{sen}(-\alpha)$ . En todo caso  $x_h(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$ .

**Lema 1.** Si  $R \neq 0$ , entonces la solución particular  $x_p$  es igual a

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \cos(\omega t - \beta)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$  y donde  $\beta$  es el ángulo que verifica que

$$\cos \beta = \frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen } \beta = \frac{R\omega}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}.$$

Antes de hacer la prueba comprobamos que las salidas del circuito verifican que

$$I(t) = x_h(t) + x_p(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \cong x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2w^2}} \cos(wt - \beta).$$

A la parte  $x_h$  se le llama **término transitorio** y a la parte  $x_p$  se le llama **estado estable**.

**Demostración:** Solución particular de la ecuación

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = F_0 \cos wt$$

Si  $R \neq 0$ , entonces  $wi$  no es raíz de la ecuación característica  $L\lambda^2 + R\lambda + 1/C = 0$ . Así la solución particular buscada será del tipo

$$x_p(t) = s_1 \cos wt + s_2 \sin wt$$

para ciertos valores  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  que hay que calcular. Para ello entraremos con  $x_p$  en la ecuación. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC}x_p(t) &= (s_1 \cos wt + s_2 \sin wt) \frac{1}{LC}, \\ \frac{R}{L}x_p'(t) &= (-s_1w \sin wt + s_2w \cos wt) \frac{R}{L} \end{aligned}$$

y

$$x_p''(t) = -s_1w^2 \cos wt - s_2w^2 \sin wt,$$

metiendo estos datos en la ecuación queda que

$$\begin{aligned} &x_p''(t) + \frac{R}{L}x_p'(t) + \frac{1}{LC}x_p(t) \\ &= \left( \frac{1}{LC}s_1 + \frac{R}{L}s_2w - s_1w^2 \right) \cos wt \\ &+ \left( \frac{1}{LC}s_2 - \frac{R}{L}s_1w - s_2w^2 \right) \sin wt = \frac{F_0}{L} \cos wt. \end{aligned}$$

Lo cuál nos permite plantear el sistema lineal, con incógnita  $s_1$  y  $s_2$

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{CL} - w^2 \right) s_1 + \frac{R}{L} w s_2 = \frac{F_0}{L} \\ -\frac{R}{L} w s_1 + \left( \frac{1}{CL} - w^2 \right) s_2 = 0. \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer y que  $w_0 = \sqrt{1/CL}$ , tenemos que las soluciones son

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0/L & Rw/L \\ 0 & 1/CL - w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/CL - w^2 & Rw/L \\ -Rw/L & 1/CL - w^2 \end{vmatrix}} = \frac{L^2 \frac{F_0}{L} (w_0^2 - w^2)}{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}$$

y

$$s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1/CL - w^2/L & F_0/L \\ -Rw/L & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/CL - w^2 & Rw/L \\ -Rw/L & 1/CL - w^2 \end{vmatrix}} = \frac{L^2 \frac{F_0}{L^2} Rw}{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}$$

De la definición del ángulo  $\beta$  del enunciado se sigue que

$$s_1 = \frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} \cos \beta \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} \sin \beta$$

y por tanto la solución particular buscada es

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} (\cos \beta \cos wt + \sin \beta \sin wt) \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} \cos(wt - \beta) \square \end{aligned}$$

### EFEECTO DE RESONANCIA.

El **estado estable** calculado anteriormente

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} \cos(wt - \beta)$$

del circuito RLC **reforzado**

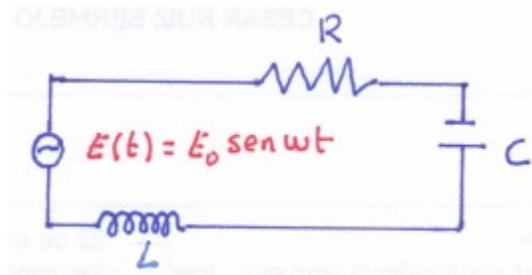


FIGURA 11. Oscilaciones reforzadas.

tiene por amplitud (o energía)  $\frac{F_0}{\sqrt{L^2 (w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}}$  y por frecuencia  $w/2\pi$ .



## CIRCUITOS MULTIMALLA. SISTEMAS LINEALES DE E.D.O.

Los circuitos RLC **multimalla** necesitan de los sistemas de E.D.O. lineales para ser tratados teóricamente. Vamos a ver un ejemplo. Más adelante, en el tema siguiente de la **Transformada de Laplace**, veremos como pueden ser resueltos.

**Ejemplo 1.** *Se considera el circuito multimalla:*

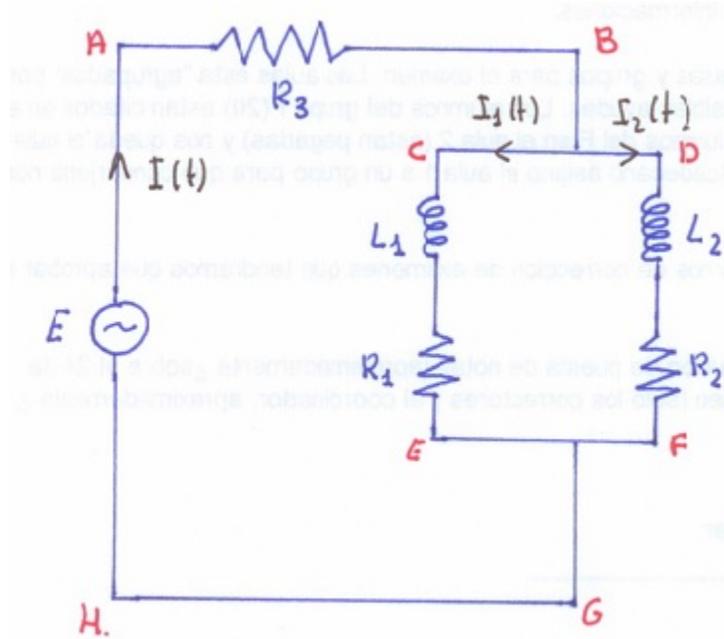
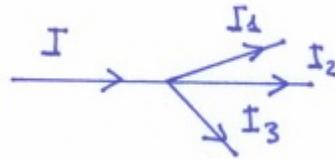


FIGURA 13. Circuito multimalla.

donde  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 30\Omega$ ,  $L_1 = 2H$ ,  $L_2 = 4H$  y  $E = 50v$ .  
Vamos a describir matemáticamente este sistema.

Según las leyes de Kirchhoff:

**a:** la suma algebraica de intensidades en un nodo es cero,



$$I = I_1 + I_2 + I_3;$$

**b:** la suma algebraica de las caídas de tensión (o de voltaje) alrededor de una malla cerrada es cero.

Así en nuestro ejemplo

$$I = I_1 + I_2.$$

Por otro lado, en la malla ABCEGHA se tiene la ecuación

$$E = IR_3 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1.$$

En la malla CDFEC se tiene la ecuación

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - R_2 I_2 = 0.$$

Juntando las tres ecuaciones nos queda

$$\begin{aligned} 30I_1 + 30I_2 + 2I_1' + 10I_1 &= 50 \\ 2I_1' + 10I_1 - 4I_2' - 20I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Este es un **sistema de dos E.D.O. lineales de primer orden y coeficientes constantes**. La transformada de Laplace que vamos a estudiar a continuación es un instrumento útil para resolver este tipo de problemas.

#### REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS,  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN  
*E-mail address:* `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`