

EDO-I.

En esta hoja de problemas se pretende encontrar las ecuaciones diferenciales que darán las soluciones de los problemas planteados. Con los contenidos del curso podremos resolver estas ecuaciones más adelante.

1.- Halla la curva que pasa por el punto $(0, 2)$ y cuya tangente en cualquiera de sus puntos tiene pendiente igual a la ordenada del punto aumentada en tres unidades.

2.- Un gamberro dió una patada a un cochecito de niño que estaba parado en la acera a $5m$ de la calzada. El cochecito salió disparado hacia la calzada con una velocidad de $2m/sg$. En defensa del crío salió una fuerza de rozamiento igual a $-Km$ donde $K = 1/3$ y m es la masa del cochecito. Sabiendo que en la calzada había un intenso tráfico ¿se salvó el niño? ¿Por qué la situación que plantea el problema no es real?

3.- Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial de la nave es de $10m/sg$. Después de $5sg$ su velocidad es de $8m/sg$. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad descenderá a $1m/sg$?

4.- Halla la forma del espejo lineal para el cuál los rayos provenientes de un punto dado se reflejan de forma paralela a una dirección dada.

5.- Halla la curva para la cuál los segmentos de las tangentes comprendidos entre los ejes coordenados tienen longitud constante α .

6.- Sobre una columna de un material uniforme se encuentra un peso P . Averigua cuál es el área de las secciones transversales de la columna si se sabe que cada una de ellas soporta una presión constante. Si además sabemos que las secciones son circulares encuentra la forma de la columna.

7.- Los puntos medios de los segmentos de las tangentes a una curva comprendidos entre el punto de contacto y el corte de las tangentes con el eje de abscisas describen la parábola $y^2 = 2x$. Halla la curva sabiendo que además pasa por el punto $(1, 2)$.

8.- Un avión A vuela horizontalmente a velocidad fija v en dirección a una soleada nube que se adivina en el horizonte, técnicamente hablando el origen de coordenadas. Un fuerte viento de velocidad $w < v$ y dirección constante desvia el avión. Se trata de encontrar la trayectoria del avión

9.- Halla la ley del movimiento de un punto material de masa m que comienza a moverse por la recta OA debido a la acción de una fuerza repulsiva que es inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto $x = OM$ hasta el centro inmóvil O .

10.- Una cadena ha sido tendida por encima de un clavo liso. al comenzar el movimiento de un lado pende $8m$ de cadena y del otro $10m$ ¿Cuánto tiempo pasará antes de que se descice toda la cadena? (No considerar el rozamiento).

11.- DESCENSO DEL PARACAIDISTA. Admitiendo que la resistencia que el aire opone a un paracaidista es función exclusiva de la velocidad v ; y teniendo en cuenta que una aproximación razonable de dicha fuerza de rozamiento es Kv^2 , donde K es una constante, halla la ley que regula el descenso del paracaidista. (**Indicación:** la Segunda Ley de Newton asegura que la resultante (o suma) de las fuerzas de un sistema es igual al producto de la masa por la aceleración del mismo; $\vec{F}(t) = m\vec{x}''(t)$).

12.- En el punto $(1, 0)$ del plano hay un ratón que se desliza con una velocidad v_1 constante a lo largo de la recta $x = 1$. Un gato apostado en el origen de coordenadas inicia sigilosamente una persecución al tiempo que el ratón empieza a moverse. El gato avanza con una velocidad constante v_2 dirigida en cada instante hacia la posición en que se encuentra el ratón. ¿Cuál es la trayectoria que describe el gato?

13.- Está nevando con regularidad. A las doce sale un máquina quitanieves que recorre en la primera hora $2km$ y en la segunda hora solo uno, quitando el mismo volumen de nieve. ¿A qué hora comenzo a nevar?

14.- La presencia de cierta toxina en un cierto medio destruye una variedad de bacterias a una velocidad que es directamente proporcional al producto del número de bacterias presentes y a la cantidad de toxina. Si no hubiese presencia de toxina, las bacterias podrían crecer a una velocidad proporcional al número de ellas en cada momento. Se supone que la cantidad de toxina se incrementa de forma constante y que la producción toxina empezó en el momento inicial. Si $y(t)$ denota el número de bacterias en cada instante t ,

a) encuentra la ecuación diferencial de primer orden para la cuál $y(t)$ es una solución;

b) resuelve la ecuación. ¿Qué sucede cuando $t \rightarrow \infty$?

15.- Encuentra la ecuación de la curva que verifica que en el punto de corte de la tangente a la curva por un punto (x, y) con el eje de abscisas, llamémosle $(\bar{x}, 0)$, verifica que $\bar{x} = x - \frac{1}{1+xy}$.

16.- VAMOS A CONSTRUIR UN AMORTIGUADOR. Un disco, fijo a una masa m , está sumergido en un fluido que ejerce una fuerza amortiguadora $-b \frac{dx}{dt}$. La fuerza elástica restauradora de un muelle es $-Kx$. Halla la ecuación que rige el funcionamiento del amortiguador (ver figura A). Resuelve la ecuación.

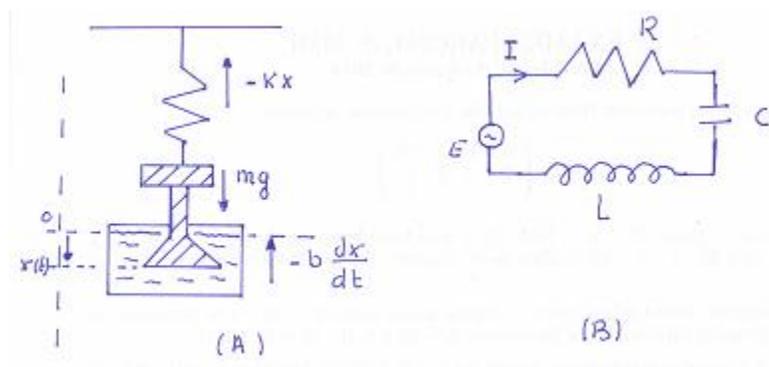


Figura 1:

17.- En un circuito eléctrico RLC (ver figura B) se producen caídas de voltaje en los elementos del circuito que experimentalmente se evalúan como:

en la resistencia $V_R = -RI$

en el selenoide $V_L = -L \frac{dI}{dt}$

en el condensador $V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds$

(donde $R, L, y C$ son constantes que dependen de los elementos colocados en el sistema y donde I es la intensidad que depende del tiempo). Si $E(t)$ es el voltaje que proporciona una pila, establece (usando las leyes de Kirchoff) la ecuación diferencial que rige el sistema. Deriva la expresión resultante y compárala con la del ejercicio anterior.

18.- Dos estudiantes de físicas pasan el verano como cooperantes en Libano. Ven disparar un cañon y deciden calcular la trayectoria del proyectil. Preguntando a soldados de la O.N.U. conocen que el disparo se efectuó con un ángulo de 30 grados y que ese tipo de cañon proporciona una velocidad inicial de $300m/s$ a un proyectil de $50kg$. Los estudiantes no se ponen de acuerdo en si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del móvil o si esta resistencia es despreciable. Para saber quién de los dos tiene razón volvieron a preguntar a los cascos azules que les dijeron que el disparo que ellos vieron alcanzó $2,550m$ en $25s$. ¿Cuál de los dos estudiantes tenía razón? (Toma la aceleración de la gravedad $g = 10m/s^2$).