EDO-II.

1.- VARIABLES SEPARADAS. a) Integra las ecuaciones:
1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ 2) $\frac{dy}{dx} = y - y^2$ 3) $\frac{dy}{dx} = y^2 senx$
4) $(1+e^t)x(t)x'(t) = e^t$ 5) $y' = 2y^2 - 2y$

b) Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y de frontera.
I) $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 2y,\ y(0) = 2$ II) $\frac{dy}{dt} = (1-2t)y^2,\ y(0) = -\frac{1}{6}$
III) $y' = y^2 \operatorname{sen} x,\ y(0) = \frac{1}{2}$ IV) $y'x^3 \operatorname{sen} y = 2,\quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{3}$.

2.- Según la Ley de Torricelli: el agua de un depósito abierto, por un agujero en el fondo, se escapará con la velocidad que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el orificio.

Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua. Se perfora en el fondo un pequeño orificio de radio r en el momento $t = 0$. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que el cuenco se vacíe?

3.-

La clepsidra, o
antiguo reloj de agua,
era un tazón del que se
dejaba salir el agua por
un orificio hecho en el
fondo.
Encuentra la forma
que debe tener el tazón
para que el nivel del
agua disminuya a un
ritmo constante.

Daba el reloj las doce...y eran doce
golpes de azada en tierra....
...¡Mi hora! - grité-...El silencio
me respondió: -No temas;
tú no verás caer la última gota
que en la clepsidra tiembla.
Dormirás muchas horas todavía
sobre la orilla vieja,
y encontrarás una mañana pura
amarrada tu barca a otra ribera.
(Antonio Machado)

4.- Resuelve los problemas **1,3,13** y **14** de la hoja primera.

5.- E.D.O. LINEALES DE PRIMER ORDEN. a) Integra las ecuaciones:
1) $\frac{dy}{dx} + 2y = x$ 2) $\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$ 3) $\frac{dy}{dx} - 3y = -2e^{-2x}$ 4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-2y}{x}$
5) $x' + 5x = t^2$ 6) $tx' + \frac{t}{1+t^2} = x$

b) Resuelve los siguientes problemas de valor inicial.
I) $\frac{dy}{dt} = 2y,\ y(0) = 4$ II) $\frac{dy}{dt} - 3y = -2e^{-2t},\ y(0) = 5$ III) $\frac{dy}{dt} = 3y + \cos t,\ y(\pi) = 4$
IV) $x' = (\tan t)x + \cos t,\ x(0) = 1$ V) $x' + 2tx = t^3,\ x(0) = 1$

6.- Resuelve los problemas **6** y **7** de la hoja primera.

7.- a) (**Modelo lineal**) Se sabe que la población de una ciudad crece a tasa constante. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese periodo de cinco años?
b) (**Ecuación logística**) Con los datos anteriores, si el desarrollo máximo de la ciudad es de 1,000,000 de personas y aplicamos el modelo de la ecuación logística ¿cuándo se alcanzará el medio millón de habitantes?

8.- a) Si f_1 y f_2 son dos soluciones de la ecuación $y' + p(x)y = 0$, prueba que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ también es solución de la ecuación para todo par $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Si f es solución de la ecuación $y' + p(x)y = g(x)$, prueba que $f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ también es solución para todo par $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

9.- Un objeto de masa m se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0. Se supone que el aire opone una resistencia proporcional a la velocidad.

a Establece la ecuación diferencial que rige el movimiento del objeto.

b Determina la exprexión de la velocidad a lo largo del tiempo.

c Calcula el tiempo que el objeto tarda en alcanzar la máxima altura, así como el valor de ésta.

10.- El carbono 14 (C_{14}) tiene una vida media de 5700 años y se encuentra uniformemente repartido en la atmósfera en forma de CO_2. Las plantas vivas absorben C_{14} y mantienen una proporción constante de C_{14} y C_{12}. Al morir la planta, la desintegración del C_{14} altera su proporción. Compara la proporción de C_{14} en dos trozos del mismo árbol, uno vivo y otro cortado hace 2000 años.

11.- Integra las siguientes E.D.O.

- $y''' = xe^x$, con $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
- $y'' - 5y' + 6 = 0$
- $xy'' = y' \ln(\frac{y'}{x})$
- $y''^2 + y'^2 = y'^4$

12.- Resuelve los problemas **1,3,** y **11** de la hoja primera.

13.- Se considera el espacio vectorial de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad : \quad f \quad \text{continua} \quad \}.$$

Se considera $C^2[a, b]$ el conjunto de las funciones dos veces derivables con continuidad sobre $[a, b]$

$$C^2[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad : \quad \exists f'' \quad \text{continua} \quad \}.$$

Prueba que:

a $C^2[a, b]$ es un subespacio vectorial de $C[a, b]$;

b sea la aplicación $T : C^2[a, b] \to C[a, b]$ donde $T(f) = f''(t) + t^5 f'(t)$, ¿es T una aplicacion lineal?

c ¿es T inyectiva?