EXAMEN Elem. de E.D.O. 4 de Julio 2019.

Nombre y apellidos:.....

1.- (1 puntos) Resuelve el problema:

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{\frac{3t}{2}+x(t)}{2x(t)-t} \\ x(1) &= 1 \end{cases}$$

2.- (1 puntos) Se considera el sistema de E.D.O. de primer orden:

$$\begin{array}{rclcrcl} x' &=& tx &+& y &-& \operatorname{sen} tz \\ y' &=& x &-& y &-& t^2 z \\ z' &=& tx &-& t^2 y &-& t^3 z. \end{array}$$

Prueba que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión tres (Indicación: usa el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones).

3.-(1 puntos) Encuentra la única solución acotada (y comprueba que es así) de la E.D.O.:

$$y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x.$$

4.- (1 puntos) Se consideran las funciones de una variable: $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$, con $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Prueba que estas funciones son linealmente independientes.

5.- (1 puntos)Encuentra el desarrollo en serie de potencias centrada en cero, hasta la potencia quinta de las x, de la solución del problema:

$$y''(x) + x^2 y'(x) + y(x) = 0, \qquad \text{para} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

6.-(2 puntos) Encuentra la solución general del sistema:

$$\begin{array}{rclcrcrcl} x' &=& 3x &+& & & & & 7 \\ y' &=& & & 5y &+& & & 9 \\ z' &=& & & & & 7z &+& 11 \end{array}$$

7.-(1 puntos) Representa el diagrama de fases del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

• — EL PROBLEMA DE CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\frac{3t}{2} + x(t)}{2x(t) - t} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

LA ECUACIÓN ES HOMOGÉNEA LUEGO EL CAMBIO DE VARIABLE $z(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ DA

TRANSFORMO $\boxed{z'(t) = \frac{1}{t^2}\left[t x'(t) - x(t)\right] = \frac{1}{t}\,\frac{\frac{3t}{2} + x(t)}{2x(t) - t} - \frac{1}{t}\,\frac{x(t)}{t} =}$

$$= \frac{1}{t}\,\frac{\frac{3}{2} + \frac{x(t)}{t}}{2\frac{x(t)}{t} - 1} - \frac{1}{t}\,\frac{x(t)}{t} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{t}\left[\frac{3/2 + z(t)}{2z(t) - 1} - z(t)\right]}$$

ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARADAS

ASÍ $z'(t)\,\dfrac{2z(t) - 1}{-2z^2(t) + 2z(t) + 3/2} = \dfrac{1}{t}$

INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + k$

$$\int \frac{2u - 1}{-2u^2 + 2u + 3/2}\,du =$$

$-2u^2 + 2u + 3/2 = 0$ $\quad u = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-4} = \dfrac{-2 \pm 4}{-4} = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$

$$= \int \frac{2u - 1}{-2(u - 3/2)(u + 1/2)}\,du = \int \frac{A}{u - 3/2} + \frac{B}{u + 1/2}\,du = \int \frac{-1/2}{u - 3/2} - \frac{1/2}{u + 1/2}\,du$$

DESCOMPONGO EN FRACCIONES SIMPLES

$$= 1/2\,\ln\left(\left|u - 3/2\right| \cdot \left|u + 1/2\right|\right)$$

ASÍ $-1/2\,\ln\left(\left|z(t) - 3/2\right|\left|z(t) + 1/2\right|\right) = \ln t + k = \ln(t + k)$

$$\ln\left(\left|z(t) - 3/2\right|\left|z(t) + 1/2\right|\right) = \ln(t+k)^{-2} \qquad z(t) = \frac{x(t)}{t}$$

ASÍ $\left(\dfrac{x(t)}{t} - 3/2\right)\left(\dfrac{x(t)}{t} + 1/2\right) = \dfrac{1}{t^2}\cdot k \qquad k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(x(t) - 3/2\,t\right)\left(x(t) + 1/2\,t\right) = k\,\dfrac{1}{t^2}$

COMO $x(1) = 1$ $\quad (1 - 3/2)(1 + 1/2) = k$ ASÍ $k = -\dfrac{3}{4}$

LUEGO LA SOLUCIÓN ES (EN IMPLÍCITAS)

$$\left(x(t) - 3/2\,t\right)\left(x(t) + 1/2\,t\right) = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{t^2}$$

• — $x' = t\,x(t) + y(t) - \operatorname{sen} t\; z(t)$ SISTEMA LINEAL DE 1º ORDEN

$y' = x(t) - y(t) - t^2\, z(t)$

$z' = t\,x(t) - t^2\, y(t) - t^3\, z(t)$

LOS COEFICIENTES DE x, y, z SON FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES CON CONTINUIDAD EN TODO $\mathbb{R}$ POR TANTO EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES NOS DICE QUE

$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ EXISTE UNA ÚNICA SOLUCIÓN $(x(t), y(t), z(t))$ QUE VERIFICA QUE

$x(0) = x_0$

$y(0) = y_0$ (*)

$z(0) = z_0$.

SEAN $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in S$ AL CONJUNTO DE SOLUCIONES DEL SISTEMA Y SEA $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left[\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right]' = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}' =$$

↓ POR SER SOLUCIONES

$$\lambda\begin{pmatrix} t x_1 + y_1 + \operatorname{sen} t\, z_1 \\ x_1 - y_1 + t^2 z_1 \\ t x_1 - t^2 y_1 + t^3 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t x_2 + y_2 + \operatorname{sen} t\, z_2 \\ x_2 - y_2 + t^2 z_2 \\ t x_2 - t^2 y_2 + t^3 z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 & -\operatorname{sen} t \\ 1 & -1 & -t^2 \\ t & -t^2 & -t^3 \end{pmatrix}\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

LO QUE PRUEBA QUE S ES UN SUBESPACIO VECTORIAL

USANDO (*) SEAN $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in S$ TAL QUE

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \\ z_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} x_3(0) \\ y_3(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ASÍ LA SOLUCIÓN QUE CUMPLE $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ ES LA MISMA QUE POR EL TEOREMA DE UNICIDAD

$$x_0\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + y_0\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + z_0\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in S.$$

LUEGO ESTAS TRES SOLUCIONES FORMAN UNA BASE DE S

Y ASÍ $\dim S = 3$

- $y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x$

EC CARACTERÍSTICA DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA

$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \qquad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA ES

$y(x) = k_1 e^{2x}\cos x + k_2 e^{2x}\operatorname{sen} x \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

OBSERVAMOS QUE ESTAS SOLUCIONES NO ESTÁN ACOTADAS

POR OTRO LADO COMO $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

TENEMOS $y'' - 4y' + 5y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

$y = \frac{3}{10}$ ES UNA SOLUCIÓN CONSTANTE DE $y'' - 4y' + 5y = 3/2$

POR OTRA LADO $y'' - 4y' + 5y = \frac{1}{2}\cos 2x$

COMO $2i$ NO ES RAÍZ DE LA CARACTERÍSTICA

PODEMOS BUSCAR UNA SOLUCIÓN DE TIPO

$y_0 = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$

$y_0' = -2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x$

$y_0'' = -4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x$

Y REMPLAZANDO EN LA ECUACIÓN

$-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x + 8A\operatorname{sen} 2x - 8B\cos 2x$

$+ 5A\cos 2x + 5B\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}\cos 2x$

IGUALANDO $-4A - 8B + 5A = 1/2 \iff A - 8B = 1/2$

$-4B + 8A + 5B = 0 \qquad 8A + B = 0$

LUEGO $B = -8A$ Y POR LO TANTO $A = 1/2$ LUEGO $A = \frac{1}{130}$

$B = \frac{-8}{130} = \frac{-4}{65}$

POR TANTO LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN ES

$y(x) = k_1 e^{2x}\cos x + k_2 e^{2x}\operatorname{sen} x + \frac{3}{10} + \frac{1}{130}\cos 2x - \frac{4}{65}\operatorname{sen} 2x$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

$= e^{2x}\left[k_1\cos x + k_2 \operatorname{sen} x\right] + \frac{3}{10} + \frac{1}{130}\cos 2x - \frac{4}{65}\operatorname{sen} 2x$

SI k_1 Y k_2 NO SON NULOS $k_1\cos x + k_2 \operatorname{sen} x \neq 0$ Y $e^{2x}\left[k_1\cos x + k_2 \operatorname{sen} x\right]$

NO ES ACOTADA LUEGO $y(x) = \frac{3}{10} + \frac{1}{130}\cos 2x - \frac{4}{65}\operatorname{sen} 2x$

ES LA ÚNICA SOLUCIÓN ACOTADA.

• — $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$ $k_i \neq k_j$ $i \neq j$

Por inducción sobre n

n=1 $e^{k_1x} \neq 0$

n=2 $\lambda_1 e^{k_1x} + \lambda_2 e^{k_2x} = 0$ con $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

así $e^{k_1x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{k_2x}$

y $1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(k_2-k_1)x}$ $k_2 - k_1 \neq 0$ ya que $k_1 \neq k_2$

luego $e^{(k_2-k_1)x} \equiv ct$ con $k_2 - k_1 \neq 0$

no es posible. luego $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Supongamos que $e^{k_1x}, \dots, e^{k_{n-1}x}$ son independientes

y que $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n$ con $\lambda_n \neq 0$ tal que

$\lambda_1 e^{k_1x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{k_{n-1}x} + \lambda_n e^{k_nx} = 0$

así $e^{k_nx} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_n} e^{k_ix}$ sin cero, si es así

no todos los λ_i pueden ser cero. luego tendríamos

$e^{\lambda_n x} \equiv 0$ lo cual no es cierto.

escribir $1 = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} e^{(k_i-k_n)x}$

con $k_i - k_n$ no nulos y todos distintos.

$(k_i - k_n = k_j - k_n \Leftrightarrow k_i = k_j)$

derivando $0 = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} (k_i - k_n) e^{(k_i-k_n)x}$

como $k_i - k_n \neq 0 \ \forall i = 1 \dots n$ y no todos los

$-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}$ son nulos llegamos a contradicción

con la hipótesis de inducción.

• —

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$y''(x) = -x^2 y'(x) - y(x) \Rightarrow y''(0)=0$

DERIVANDO

$y'''(x) = -2x\,y'(x) - x^2 y''(x) - y' \Rightarrow y'''(0) = -1$

$y^{(IV)}(x) = -2y'(x) - 2x\,y''(x) - 2x\,y''(x) - x^2 y'''(x) - y''(x) =$

$= -2y'(x) - (4x+1)\,y''(x) - x^2 y'''(x) \Rightarrow y^{(IV)}(0) = -2$

$y^{(V)}(x) = -2y''(x) - 4y''(x) - (4x+1)\,y'''(x) - 2x\,y'''(x) - x^2 y^{(IV)}(x)$

Y ASÍ $y^{(V)}(x) = +1$

EL POLINOMIO DE GRADO 5 QUE BUSCAMOS ES

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{2}{4!} x^4 - \frac{1}{5!} x^5 =$$

$$= \boxed{x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{120} x^5 \simeq y(x)}$$

• — $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ SISTEMA DE ECUACIONES EDO. DE 1ᵉʳ ORDEN LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEO

- MATRIZ FUNDAMENTAL DEL SISTEMA HOMOGÉNEO

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA HOMOGÉNEO $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

CON $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

- SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO PROBAMOS $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv cte$ ASÍ SALE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -9/5 \\ -11/7 \end{pmatrix}$

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 \\ -9/5 \\ -11/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} - 7/3 \\ c_2 e^{5t} - 9/5 \\ c_3 e^{7t} - 11/7 \end{pmatrix}} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

— DIAGRAMA DE FASE DE $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

AUTOVALORES $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$ luego $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son dos autovalores reales y positivos

— Punto de equilibrio $(0,0)$ como $\lambda = 1, \lambda = 2$ positivos nodo inestables

- Autovectores $v_1 = (1,0)$ para $\lambda_1 = 1$.

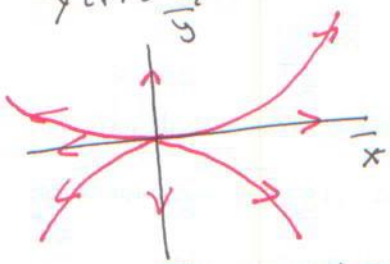
para $\lambda_2 = 2$ $\quad -x + 3y = 0 \Rightarrow v_2 = (3,1)$ autovector

matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El cambio $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ nos lleva al sistema reducido $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{y}' = 2\bar{y}$ cuyo diagrama de fases es

$\bar{x}(t) = c_1 e^t$ y $\dfrac{\bar{y}'(t)}{\bar{x}'(t)} = \dfrac{2c_2 e^{2t}}{c_1 e^t} = \dfrac{2c_2}{c_1} e^t \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

$\bar{y}(t) = c_2 e^{2t}$

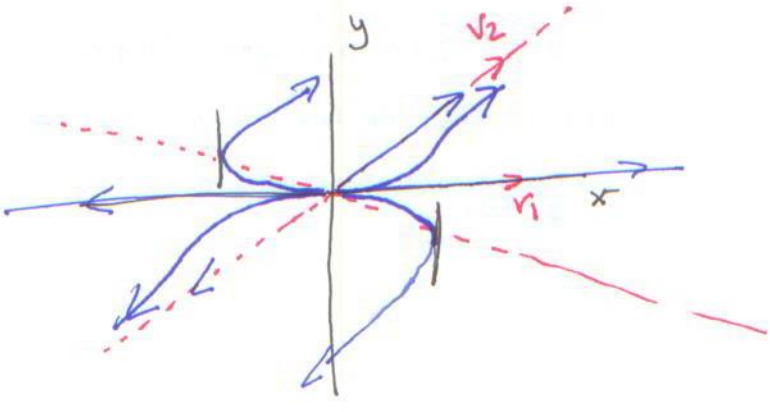


Ahora $\bar{e}_1$ se transforma por P en $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

y $\bar{e}_2$ " " " P en $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to -\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[t \to \infty]{}$ no acotado.

por otro lado $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{c_2 2 e^{2t}}{c_1 e^t + 6c_2 e^{2t}} = \dfrac{2c_2}{c_1 e^{-t} + 6c_2} \longrightarrow \begin{cases} 1/3 & \text{si } t \to \infty \\ 0 & \text{si } t \to \infty \end{cases}$



Isoclina de pendiente $\pm\infty$

$x' = x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y$

Isoclina $x + 3y = 0$