EXAMEN Elem. de E.D.O. 8 de Junio 2018.

Nombre y apellidos:..

1.- (1 punto) Dado el problema de Cauchy $\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{1}{xy(x)+e^{\frac{y^2(x)}{2}}} \\ y(0) &= 4 \end{cases}$ ¿Para que valor de x_0, se tiene que la solución del problema verifica que $y(x_0) = \sqrt{2}$?

2.- Se sabe que t^2e^t, $t(te^t - e^t)$ y $e^t(t^2+1)$ son tres soluciones de una E.D.O. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
a) (1 punto) Calcula la solución de la E.D.O. que verifica $x(0) = 7$ y $x'(0) = 0$.
b) (1 punto) ¿Cuál es la ecuación concreta de esta E.D.O.?

3.-(1 punto) Sea $x'(t) = Ax(t)$ un sistema lineal con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se sabe que al menos $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$ son autovalores de la matriz A. Demuestra que al menos existen tres soluciones x, y y z de modo que

- $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$;
- y está acotada;
- $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

4.-(1 punto) Encuentra $x(t)$ de modo que $Lx(s) = \frac{s^2}{s^2+1}$. Justifica tu respuesta.

5.-(1 punto) Encuentra el desarrollo en serie de potencia, centrado en cero hasta la quinta potencia de x, de la solución del problema $y''(x) + xy'(x) + xy(x) = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

6.-(1 punto) Representa el diagrama de fases del sistema plano $\begin{matrix} x' &=& \lambda_1 x & \\ y' &=& & \lambda_2 y \end{matrix}$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Justifica tu dibujo.

Ejercicios adicionales: solo se corrigen si los ejercicios anteriores estan todos correctos:

A) Demuestra la fórmula de Liouville: Se considera el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ con $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1,..,n}$ donde cada función $a_{i,j}(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Prueba que para cada matriz fundamental $\phi(t)$ se verifica que:

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)|e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(s)ds}$$

para todo $t_0 \in (a,b)$.

B) Dada la ecuación de Riccati $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t)$, de la cual se conocen dos soluciones particulares x_1 y x_2, encuentra una expresión de la solución general de la ecuación.

PROBLEMA 1:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x\,y(x) + e^{\frac{y^2(x)}{2}}} \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

El problema en x es lineal

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = x(y)\,y + e^{y^2/2}$$

La solución del problema homogéneo

$$x'(y) = x(y)\,y \quad \text{es}$$

$$\frac{x'}{x} = y \quad \text{integrando en } y \quad \ln|y| = y^2/2 + k$$

Así $\boxed{x(y) = k\,e^{y^2/2} \quad k \in \mathbb{R}}$

Una solución particular usando para ello el método de variación de las constantes

$$h(y) = k(y)\,e^{y^2/2}$$

derivando $h'(y) = k'(y)\,e^{y^2/2} + \cancel{k(y)\,y\,e^{y^2/2}} = \cancel{h(y)\,y} + e^{y^2/2}$

y así $k'(y) = 1$ luego $k(y) = y$

y $h(y) = y\,e^{y^2/2}$ es una solución particular.

La solución general de la ecuación es

$$x(y) = k\,e^{y^2/2} + y\,e^{y^2/2}. \quad k \in \mathbb{R}.$$

Como para $x(4) = 0$ se sigue que

$$0 = k\,e^{8} + 4e^{8} \Rightarrow k = -4.$$

Luego $x(y) = -4\,e^{y^2/2} + y\,e^{y^2/2}$

Solución implícita en y.

Ahora si $y = \sqrt{2}$ $\quad x(\sqrt{2}) = -4e + \sqrt{2}e$

Luego $x_0 = (\sqrt{2} - 4)\,e.$

PROBLEMA 2: $t^2e^t,\ t(te^t-e^t),\ e^t(t^2+1) \in S'$

S' conjunto de las soluciones de una E.D.O lineal de 2º orden de coeficientes constantes, como sabemos que S' es un espacio afín

$$t(te^t-e^t) - t^2e^t = -te^t$$

y $e^t(t^2+1) - t^2e^t = e^t$

son dos soluciones de la E.D.O homogénea asociada y como te^t y e^t son linealmente independiente

$$y(t) = k_1 e^t + k_2 te^t + t^2e^t$$ es la solución general de la E.D.O no homogénea

A) Si $x(0)=7$ entonces $k_1 = 7$

Ahora $x'(t) = 7e^t + k_2 e^t + k_2 te^t + 2te^t + t^2e^t$

Si $0 = x'(0) = 7 + k_2$ luego $k_2 = -7$

La solución buscada es $\boxed{x(t) = 7e^t - 7te^t + t^2e^t}$

B) $ax'' + bx' + cx = f(t)$ E.D.O

Como la ecuación característica $as^2 + bs + c = 0$ tiene por raíces $s=1$ doble ya que e^t y te^t son soluciones de la homogénea

Así $as^2 + bs + c = (s-1)^2 = s^2 - 2s + 1$

y nuestra ecuación es

$$x'' - 2x' + x = f(t).$$

Como t^2e^t es solución, se tiene que

$(t^2e^t) - 2(t^2e^t)' + (t^2e^t)'' = \cancel{t^2e^t} - 2[\cancel{2t}e^t + \cancel{t^2e^t}] + [2e^t + \cancel{2te^t} + \cancel{2te^t} + \cancel{t^2e^t}] = 2e^t$

Así $\boxed{x'' - 2x' + x = 2e^t}$

PROBLEMA 3:] Si $\lambda=1$, $\lambda=0$ y $\lambda=-1$ son autovalores de la matriz A entonces existirán al menos tres vectores

$v_1 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ autovector para $\lambda=1$

$v_2 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ " " $\lambda=0$

$v_3 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ " " $\lambda=-1$

Sabemos que (sólo hay que comprobarlo entrando en el sistema $x'=Ax$)

que $x(t)=e^t v_1$ es una solución

$$x'(t)=e^t v_1 \underset{\substack{\downarrow \\ v_1 \text{ autovector.}}}{=} e^t A v_1 = A e^t v_1 = A x(t)$$

y claro $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \lim_{t\to\infty} e^t |v_1| = \infty$
$\quad \downarrow$ $|v_1|\neq 0$

que $y(t)=v_2$ es una solución constante, que ya que $Av_2=0$

pese ser constante está acotada

que $z(t)=e^{-t}v_3$ es una solución

$$(e^{-t}v_3)' = -e^{-t}v_3 = e^{-t}(-v_3) \underset{\substack{\downarrow \\ v_3 \text{ autovector para } \lambda=-1.}}{=} e^{-t}Av_3 = Ae^{-t}v_3$$

y claro $\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}v_3 = 0.$

PROBLEMA 4:] $\underline{\underline{\text{NO}}}$ existe x tal que $\mathcal{L}x(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$

ya que si $\mathcal{L}x(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1} = \dfrac{s^2+1-1}{s^2+1} = 1-\dfrac{1}{s^2+1} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{tablas}}}{=}$

$= 1-\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)(s)$

así $\mathcal{L}x(s)+\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)(s) = \mathcal{L}(x(t)+\operatorname{sen} t)(s) = 1$

No existe y tal que $\mathcal{L}y(s)=1$ ya que si suponemos que $\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt = 1$ derivando en s esta igualdad

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(y(t)e^{-st}\right)dt = \int_0^\infty -t\,y(t)e^{-st}\,dt$$

como $\mathcal{L}$ es un operador inyectivo se tiene que $-t\,y(t)\equiv 0$ luego $y\equiv 0$ y entonces $\mathcal{L}(0)(s)\equiv 0$ ¡contradicción!

PROBLEMA 5: $y''(x) + x\,y'(x) + x\,y(x) = 0$

LUEGO $y''(x) = -x\,y'(x) - x\,y(x) = 0$

SABEMOS QUE

$y(0) = 1$

$y'(0) = 1$

$y''(0) = -0\,y'(0) - 0\,y(0) = 0$

$y'''(x) = -y'(x) - x\,y''(x) - y(x) - x\,y'(x)$

$y'''(0) = -1 - 1 = -2$

$y^{(IV)}(x) = -y''(x) - y'' - x\,y'''(x) - y'(x) - y'(x) - x\,y''(x)$

$y^{(IV)}(0) = -1 - 1 = -2$

$y^{(V)}(x) = -2y''' - y'''(x) - x\,y^{(IV)}(x) - 2y''(x) - y''(x) - x\,y'''(x)$

$y^{(V)}(0) = -2(-2) - (-2) = +6$

EL DESARROLLO EN SERIE DE y CON CENTRO EN CERO ES

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{6}{5!}x^5 + \dots$$

$$= 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots$$

OTRA FORMA DE VERLO: COMO x COEFICIENTE DE y' e y ES UNA FUNCIÓN ANALÍTICA PODEMOS BUSCAR UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n. \quad \text{ASÍ } xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$a_0 = f(0) = 1$

$a_1 = f'(0) = 1$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ Y ASÍ } x y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \text{ Y ASÍ } y''(x) = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\text{ASÍ } y''(x) + x\,y'(x) + x\,y(x) = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n + a_{n-1}\right) x^n = 0$$

COMO SE TIENE QUE CUMPLIR LA ECUACIÓN

$a_2 = 0$

Y $a_{n+2} = -\dfrac{n a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad n \geq 1$

ASÍ $a_3 = -\dfrac{2}{3 \times 2} = -1/3$, $a_4 = -\dfrac{1}{4 \times 3} = -1/12$

Y $a_5 = -\dfrac{3 \times (-1/3)}{5 \times 4} = \dfrac{1}{20}$ RESULTADOS IGUALES A LOS DE ARRIBA

EJERCICIO 6: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

En este caso una matriz fundamental es

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

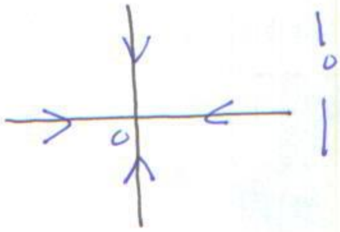
Luego las soluciones son de la forma $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Así

- Punto de equilibrio $(0,0)$.
- Para λ_1 autovalor, $e_1 = (1,0)$ es autovector y $e^{\lambda_1 t}(1,0)$ solución
- Para λ_2 autovalor, $e_2 = (0,1)$ es autovector y $e^{\lambda_2 t}(0,1)$ solución

Como $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, el $(0,0)$ es un nodo estable.



Campo de direcciones.

La recta $x' = 0$ coincide con $x = 0$

La recta $y' = 0$ " con $y = 0$

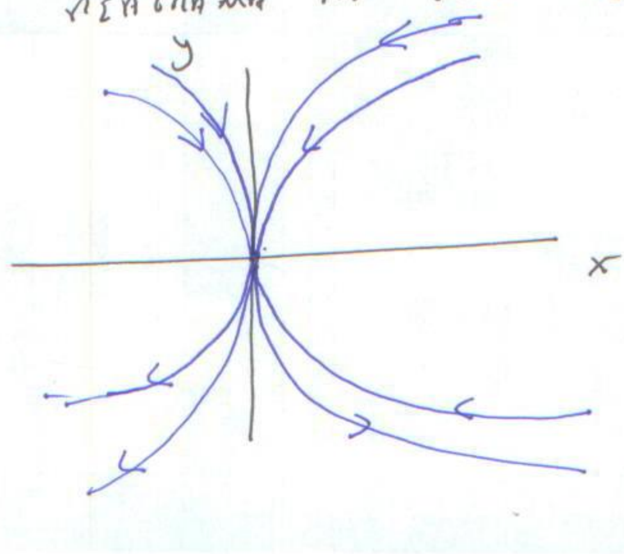
Así

$x' > 0$, $y' < 0$	$x' < 0$, $y' < 0$
$x' > 0$, $y' > 0$	$x' < 0$, $y' > 0$

Ya que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$

Tangentes $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \dfrac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \begin{cases} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \\ \xrightarrow[t\to\infty]{} \pm\infty \end{cases}$

Luego el diagrama de fases es



EJERCICIO 6: $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$

En este caso una matriz fundamental es

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

Luego las soluciones son de la forma $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$

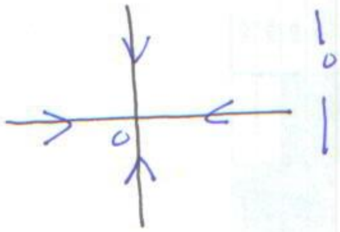
$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

$y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Así

- punto de equilibrio $(0,0)$.
- para λ_1 autovalor, $e_1 = (1,0)$ es autovector y $e^{\lambda_1 t}(1,0)$ solución
- para λ_2 autovalor, $e_2 = (0,1)$ es autovector y $e^{\lambda_2 t}(0,1)$ solución

Como $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, el $(0,0)$ es un nodo estable.



Campo de direcciones

La recta $x' = 0$ coincide con $x = 0$

La recta $y' = 0$ " con $y = 0$

Así

$x' > 0$, $y' < 0$	$x' < 0$, $y' < 0$
$x' > 0$, $y' > 0$	$x' < 0$, $y' > 0$

ya que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$

tangentes $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \dfrac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ $\begin{cases} \to 0 & t \to -\infty \\ \to \pm\infty & t \to \infty \end{cases}$

Luego el diagrama de fases es