EXAMEN Elem. de E.D.O. 31 de Mayo 2019.

Nombre y apellidos:..

1.- (1 puntos) Dada la ecuación de Riccati

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t),$$

realiza el cambio de variable $z(t) = \dfrac{1}{x(t) - x_1(t)}$, donde x_1 es una solución conocida de la E.D.O.; y comprueba que la E.D.O. en z resultante es una E.D.O. lineal de primer orden.

2.- (1 puntos) Encuentra el desarrollo en serie de potencias centrada en cero, hasta la potencia quinta de las x, de la solución del problema:

$$y''(x) + 3y'(x) + (x-1)y(x) = 0, \qquad \text{para} \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

3.- (2 puntos) Utiliza la transformada de Laplace para resolver:

$$\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = e^t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- (1 puntos) Prueba que las raíces, y sus multiplicidades, de la ecuación característica de la E.D.O.

$$y^{n)} + a_1 y^{n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

son iguales a los autovalores, y sus multiplicidades, del sistema de E.D.O. de primer orden

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

5.- (1 puntos) Aplicando el *método de las isoclinas* traza las gráficas de las soluciones de la E.D.O.: $\qquad y' = \dfrac{2x-1}{y}$

6.-(1 puntos) Sea el sistema $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra una solución del sistema que verifique que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

7.-(1 puntos) Dibuja la trayectoria de la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 8x + y & x(0) = 1 \\ y' = -4x + 2y & y(0) = -2, \end{cases}$$

en el contexto del diagrama de fases del sistema.

Ejercicio adicional: solo se corrige si los ejercicios anteriores están todos correctos:

Se considera el espacio vectorial de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad : \quad f \quad \text{continua} \quad \}.$$

Se considera $C^2[a, b]$ el conjunto de las funciones dos veces derivables con continuidad sobre $[a, b]$

$$C^2[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad : \quad \exists f'' \quad \text{continua} \quad \}.$$

Responde y prueba que:

a $C^2[a, b]$ es un subespacio vectorial de $C[a, b]$ y es de dimensión infinita;

b sea la aplicación $T : C^2[a, b] \to C[a, b]$ donde $T(f) = f''(t) + t^5 f'(t)$, ¿es T una aplicación lineal?

c ¿es T inyectiva?

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s}$

(2) Si $f(t) = \operatorname{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$

(5) Si $f(t) = \operatorname{senh}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(9) En general, dada $f(t)$, entonces $L[e^{-\alpha t} f(t)](s) = Lf(s + \alpha)$

(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, ($\Gamma$ la función Gamma de Euler).

(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

(12) Si $f(t) = t \operatorname{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(13) Si $f(t) = t \cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(14) En general, dada $f(t)$, entonces $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

• — ECUACIÓN DE RICCATI:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t)$$

SEA EL CAMBIO DE VARIABLE $z(t) = \frac{1}{x(t)-x_1(t)}$

DERIVANDO: $\boxed{z'(t) = \frac{-(x-x_1)'(t)}{(x(t)-x_1(t))^2}} =$

$$= \frac{x_1'(t) - x'(t)}{(x(t)-x_1(t))^2} = \frac{a(t)x_1(t) + b(t)x_1^2(t) + \cancel{c(t)} - a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - \cancel{c(t)}}{(x(t)-x_1(t))^2}$$

$\downarrow$ x_1', x_1' SOLUCIONES

$$= \frac{-a(t)(x(t)-x_1(t)) - b(t)(x^2(t)-x_1^2(t))}{(x(t)-x_1(t))^2}$$

$\downarrow$ DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$= -a(t)\frac{1}{x(t)-x_1(t)} - \frac{b(t)(x(t)+x_1(t))}{x(t)-x_1(t)} =$$

$$= -a(t)\frac{1}{x(t)-x_1(t)} - b(t) - \frac{b(t)\,2x_1(t)}{x(t)-x_1(t)} =$$

$$= \left[-a(t) - b(t)\,2x_1(t)\right]\frac{1}{x(t)-x_1(t)} - b(t) =$$

$$= \boxed{\left[-a(t) - b(t)\,2x_1(t)\right] z(t) - b(t)}$$

COMO a, b Y x_1 SON FUNCIONES CONOCIDAS, LLEGAMOS A UNA E.D.O LINEAL DE 1ᵉʳ ORDEN NO HOMOGÉNEA

• — BUSCAMOS $P_{5,0}(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{y^{k)}(0)}{k!} x^k$

COMO $y(0) = 2$

$y'(0) = 0$

$y''(x) = -3y'(x) + (1-x)y(x)$ ASÍ $y''(0) = 2$

DERIVANDO

$y'''(x) = -3y''(x) - y(x) + (1-x)y'(x)$ ASÍ $y'''(0) = -8$

$y^{iv)}(x) = -3y'''(x) - y'(x) - y'(x) + (1-x)y''(x) =$

$= -3y'''(x) - 2y'(x) + (1-x)y''(x)$ ASÍ $y^{iv)}(0) = 26$

$y^{v)}(x) = -3y^{iv)}(x) - 3y''(x) + (1-x)y'''(x)$ ASÍ $y^{5)}(0) = -92$

LUEGO EL POLINOMIO BUSCADO ES:

$$2 + x^2 + \frac{-8}{3!}x^3 + \frac{26}{4!}x^4 - \frac{92}{5!}x^5 =$$

$$2 + x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{12}x^4 - \frac{23}{30}x^5 \simeq y(x).$$

• — SEA LA EC. LINEAL DE 2º ORDEN

$$x'' - 4x' + 4x = e^t$$

CON CONDICIONES $x(0) = x'(0) = 0$

APLICANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(x'' - 4x' + 4x) = s^2 \mathcal{L}x(s) - 4s\mathcal{L}x(s) + 4\mathcal{L}x(s).$$

$x'(0) = x(0) = 0$

$$\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$$

TABLAS ó $\int_0^\infty e^t e^{-st}\,dt$

LUEGO $(s^2 - 4s + 4)\,\mathcal{L}x(s) = \dfrac{1}{s-1}$ y ASÍ

$$\boxed{\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{s^2-4s+4}}$$

SOLUCIÓN EN TRANSFORMADAS

PROBLEMA INVERSO

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$1 = A(s-2)^2 + B(s-2)(s-1) + C(s-1) = As^2 - 4As + 4A + Bs^2 - 3Bs + 2B + Cs - C$$

ASÍ

$$0 = A + B$$
$$0 = -4A - 3B + C$$
$$1 = +4A + 2B - C$$

$$A = -B$$
$$0 = 4B - 3B + C = B + C$$
$$1 = -4B + 2B - C$$

$$\Rightarrow \boxed{C = A = 1 \text{ y } B = -1}$$

LUEGO $A = -B = C$ y $1 = C$

ASÍ $$\mathcal{L}x(t) = \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

USANDO LAS TABLAS

$$\boxed{x(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}}$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY

• — La ecu lineal de orden n

$$y^{n)} + a_1 y^{n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

tiene por ecuación característica

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0}$$

Los autovalores del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

se calculan con

$$0 = \underline{\underline{|A_n - \lambda I|}} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} +$$

Desarrollando por la 1ª columna

$$+ (-1)^{n-1}(-a_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (**)$$

Vamos a utilizar inducción con respecto a n.

Si $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$

$0 = |A_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(a_1 + \lambda) + a_2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ = ec. característica de $y^2 + a_1 y' + a_2 y = 0$

Coincide con la ec. característica

Si suponemos que $(-1)^n |A_n - \lambda I|$ = ec característica de $y^n + a_1 y^{n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ la fórmula es cierta para $n = 2$

en general para $n-1$ $(-1)^{n-1}|A_{n-1} - \lambda I| = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}$

Si para

En general $(**) = -\lambda (-1)^{n-1}[\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}] + (-1)^{n-1}(-a_n) =$

$$= \underline{(-1)^n [(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda) + a_n]} =$$ ec característica.

Así $(-1)^n |A_n - \lambda I|$ = ec característica

Así $|A_n - \lambda I| = 0$ y $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

Así las raíces de $|A_n - \lambda I| = 0$ y $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ así como sus correspondientes multiplicidades son iguales

• — $y' = \frac{2x-1}{y}$

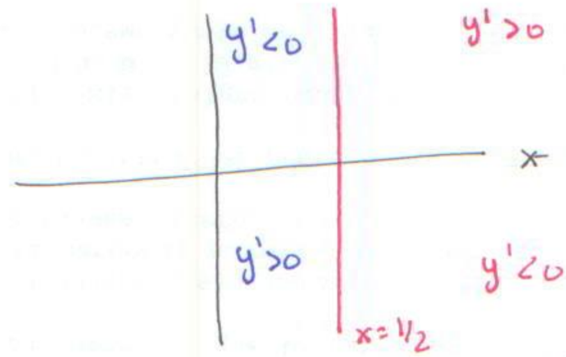
La isoclina $y'=0 \iff 2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$

Observemos que

$$y'>0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{2} \text{ y } y>0 \\ \text{ó} \\ x<1/2 \text{ y } y<0 \end{cases}$$

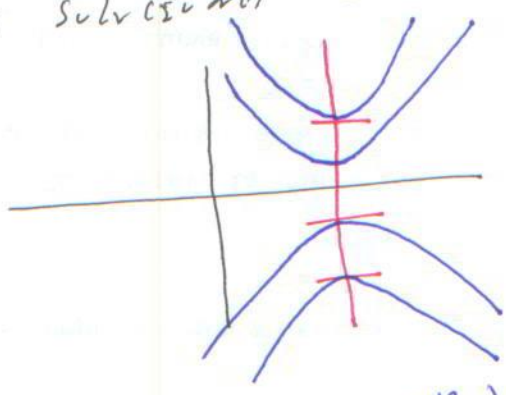
$$y'<0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} x<1/2 \text{ y } y>0 \\ \text{ó} \\ x>\frac{1}{2} \text{ y } y<0 \end{cases}$$

Así



Observemos que la $y=0$ no está definida la E.D.O

Las soluciones serán del tipo



• — $x' = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 13 \\ 0 & & & & & -11 & 0 \\ & & & & 9 & & \\ & & & -7 & & & \\ 0 & & 5 & & & & \\ & 3 & & & & & \\ -1 & & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x_4' = -7x_4$ EDO lineal 1er orden

Luego $x(t) = (0,0,0,e^{-7t},0,0,0)$ es una solución del sistema y además

$\lim_{t\to\infty} x(t) = (0,0,0,\lim_{t\to\infty} e^{-7t},0,0,0) = 0.$

$$x' = 8x + y \qquad x(0) = 1$$
$$y' = -4x + 2y \qquad y(0) = -2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = -2 \end{matrix}$$

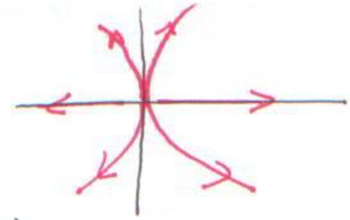
- AUTOVALORES DE LA MATRIZ

$$0 = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 20 =$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-80}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}$$

LA MATRIZ J ASOCIADA ES DE TIPO $\begin{pmatrix} 5+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 5-\sqrt{5} \end{pmatrix} = J$

AMBOS AUTOVALORES POSITIVOS, LUEGO EL DIAGRAMA DE FASE PARA J ES DEL TIPO



- AUTOVECTOR PARA $\lambda_1 = 5 + \sqrt{5}$

$$(3 - \sqrt{5})x + y = 0 \qquad v_1 = (1, \sqrt{5} - 3)$$

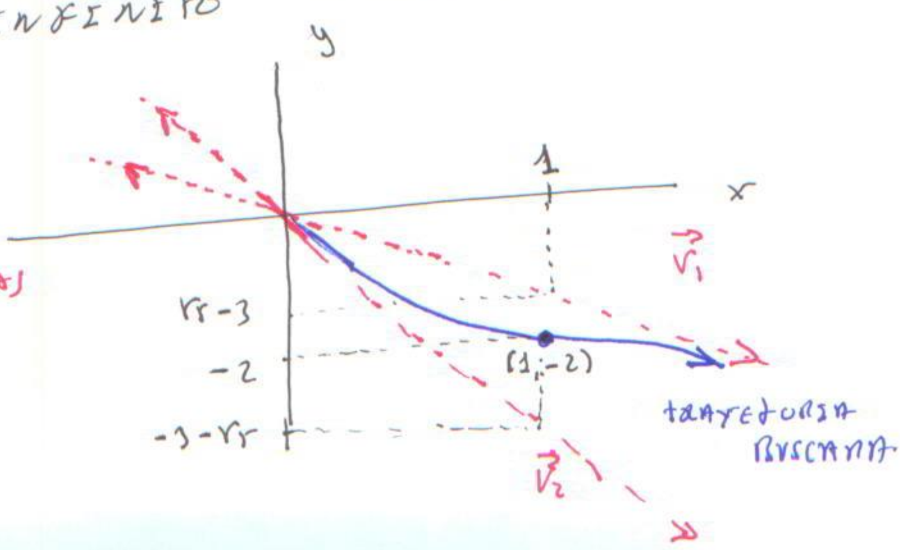
- AUTOVECTOR PARA $\lambda_2 = 5 - \sqrt{5}$

$$(3 + \sqrt{5})x + y = 0 \qquad v_2 = (1, -3 - \sqrt{5})$$

MATRIZ DE PASO $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{5}-3 & -3-\sqrt{5} \end{pmatrix}$

LAS TRAYECTORIAS DE LAS SOLUCIONES SALEN DE CERO PARALELA A v_2 PEGANDOSE (CON TANGENTE) GRANDES CON PENDIENTE LAS TRAYECTORIAS SE HACEN TENDIENDO A LA DE v_1 EN EL INFINITO

ASÍ



LAS TRAYECTORIAS NO SE CORTAN