Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-10

Nombre y apellidos.....

1.- Vamos a resolver el problema de valor inicial $y''' + y'' - y' - y = xe^x$ con $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$.

1_1.- Encuentra la solución general del problema homogéneo asociado.

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$ ES RAÍZ POR TANTO

$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ \hline -\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \quad 2\lambda^2 - \lambda - 1 & \\ \quad -2\lambda^2 + 2\lambda & \\ \quad \lambda - 1 & \end{array}$$

ASÍ $\lambda = 1$ Y $\lambda = -1$ RAÍZ DOBLE NOS DAN UNA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

1_2.- Encuentra una solución particular de la E.D.O. (**Indicación:** Prueba con $x(Ax + B)e^x$. ¿Por qué no usamos la función $(Ax + B)e^x$?)

COMO $\lambda = 1$ ES RAÍZ SIMPLE PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O

$$y(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y'(x) = [2Ax + B + Ax^2 + Bx]e^x = [Ax^2 + 2Ax + Bx + B]e^x$$

$$y''(x) = [2Ax + 2A + B + Ax^2 + 2Ax + Bx + B]e^x = [Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B]e^x$$

$$y'''(x) = [2Ax + 4A + B + Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B]e^x = [Ax^2 + 6Ax + Bx + 6A + 3B]e^x$$

ENTRANDO EN LA E.D.O

$$e^x[(Ax^2 + 6Ax + Bx + 6A + 3B) + (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) + (-Ax^2 - 2Ax - Bx - B) + (-Ax^2 - Bx)] = e^x[8Ax + 8A + 4B] = xe^x$$

E.D.O NO HOMOGÉNEA

ASÍ $8A = 1$, $8A + 4B = 0$ $\Rightarrow$ $A = 1/8$, $B = -1/2$

LA SOLUCIÓN PARTICULAR ES POR TANTO

$$y(x) = \left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right]e^x$$

1_3.- Encuentra la solución única para los datos iniciales dados.

LA SOLUCIÓN QUE BUSCAMOS ES DEL TIPO

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{4}x\right)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

$$y'(x) = \left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{4}\right)e^x + C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3\left[e^{-x} - xe^{-x}\right]$$

$$y''(x) = \left(\tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\right)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\left[-2e^{-x} + xe^{-x}\right]$$

Y DEBEMOS QUE

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$0 = y'(0) = -1/4 + C_1 - C_2 + C_3$$

$$1 = y''(0) = -1/4 + C_1 + C_2 - 2C_3 \iff \frac{5}{4} = -2C_3$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA $C_3 = -5/8$ $C_2 = -\frac{7}{16}$ y $C_1 = \frac{7}{16}$

ASÍ LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{4}x\right)e^x + \frac{7}{16}e^x - \frac{7}{16}e^{-x} - \frac{5}{8}xe^{-x}$$

1_4.- Encuentra una solución particular de la E.D.O. usando el método de variación de las constantes. (**Indicación:** usa todo el papel adicional que sea necesario).

DADAS LAS SOLUCIONES DE LA HOMOGÉNEA e^x e^{-x} y xe^{-x}

SU WROSKIANO ES

$$W[e^x, e^{-x}, xe^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & xe^{-x} \\ e^x & -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \\ e^x & e^{-x} & -2e^{-x} + xe^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & xe^{-x} \\ 1 & -1 & e^{-x} - xe^{-x} \\ 1 & 1 & -2e^{-x} + xe^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & e^{-x} \\ 1 & 1 & -2e^{-x} \end{vmatrix} + e^{-x} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -x \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}}_{=0} = e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4e^{-x}$$

SE PROBAMOS UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)xe^{-x}$$

TENEMOS QUE

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & xe^{-x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \\ xe^{-x} & e^{-x} & -2e^{-x} + xe^{-x} \end{vmatrix}}{4e^{-x}} dx$$

$$C_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 & xe^{-x} \\ e^x & 0 & e^{-x} - xe^{-x} \\ e^x & xe^x & -2e^{-x} + xe^{-x} \end{vmatrix}}{4e^{-x}} dx$$

$$C_3(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & xe^x \end{vmatrix}}{4e^{-x}} dx$$

. . . . etc.