Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-12

Nombre y apellidos.....

1.- Se consideran la E.D.O. lineal de orden n y coeficientes constantes:

$$y^{n)}(t) + a_1 y^{n-1)}(t) + ... + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (1)$$

y el sistema de E.D.O. de primer orden asociado:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \cdots -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = Ay(t) \qquad (2)$$

(Observa el abuso de notación que hemos cometido).

Prueba que las soluciones de la ecuación característica de (1) coinciden con los **autovalores** de la matriz A con la misma multiplicidad. (**Indicación:** procede por inducción).

PARA $n=2$ $\quad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ TIENE $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ POR. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

LOS AUTOVALORES DE $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ SE CALCULAN USANDO

$$\boxed{0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(a_1+\lambda) + a_2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2}$$

NOS SALE LA MISMA ECUACIÓN. VAMOS A VER QUE $(-1)^n|A-\lambda I| =$ ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

AHORA PARA EL CASO n

$$\boxed{0 = |A - \lambda I|} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ & & & \\ 0 & & -\lambda & 1 \\ -a_n & & -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & & -\lambda & 1 \\ -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1-\lambda \end{vmatrix} +$$

DESARROLLANDO POR LA 1ª COLUMNA

$$+ (-1)^{n-1}(-a_n) \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ -\lambda & 1 & \\ & & 0 \\ 0 & & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1)^{n-1}\left[\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}\right] +$$

HIPÓTESIS INDUCCIÓN

$$+ (-1)^{n-1}(-a_n) =$$

$$= (-1)^n \left[\lambda(\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \quad + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}) + a_n\right] =$$

$$\boxed{= (-1)^n \left[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \quad + a_{n-1}\lambda + a_n\right]}$$

ESTA IGUALADO PARA QUE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE (1) Y LA DE LA MATRIZ A COINCIDAN SALVO SIGNO Y POR TANTO TIENE SOLUCIONES IDÉNTICAS

2.- Consideramos el problema $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ donde $A \in M_{n\times n}(C(\alpha,\beta))$ y $b \in C(\alpha,\beta)^n$ (es decir $A = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}}$ y $b = (b_i(t))_{i=1,2,\dots,n}$ donde $a_{i,j}, b_i : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ son continuas.

2_1.- Sea $S = \{\, x \in C(\alpha,\beta)^n \ : \ x$ solución de $x' = Ax \,\}$. Prueba que que S es un subespacio vectorial de dimensión n de $C(\alpha,\beta)^n$. (**Indicación:** usa el Teorema de Unicidad de Soluciones).

SEAN $x_1, x_2 \in S$ Y $r \in \mathbb{R}$. VEAMOS QUE $r x_1 + x_2 \in S$.

CLARO $(r x_1 + x_2)' = r x_1' + x_2' = r A x_1 + A x_2 = A r x_1 + A x_2 =$

$= A(r x_1 + x_2)$.

HEMOS USADO LA LINEALIDAD DE LA DERIVADA Y DEL PRODUCTO DE MATRICES.

SEA $t_0 \in (\alpha,\beta)$. CONSIDERAMOS $x_i \in S$ LA ÚNICA SOLUCIÓN TAL QUE $x_i(t_0) = e_i$

DONDE $e_i = (0, \dots 0, \underbrace{1}_{i} 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ $i = 1 \dots n$.

POR EL TEOREMA DE UNICIDAD SABEMOS QUE $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$.

EXISTE UNA ÚNICA $x \in S$ TAL QUE $x(t_0) = a = (a_1 a_2 \dots a_n)$.

SEA $y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \quad + a_n x_n(t)$; $y \in S$ POR SER

COMBINACIÓN LINEAL DE SOLUCIONES Y $y(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = a$.

ASÍ POR EL TEOREMA DE UNICIDAD $x \equiv y$. LUEGO

S ES GENERADO POR LAS SOLUCIONES $x_1 x_2 \dots x_n$. COMO

SON INDEPENDIENTES LA $\dim S = n$.

2_2.- Sea $S' = \{\, x \in C(\alpha,\beta)^n \ : \ x$ solución de $x' = Ax + b \,\}$. Sea $y_0 \in S'$. Prueba que

$$S' = \{\, y_0 + x \ : \ x \in S \}.$$

SEA $y \in S'$. VEAMOS QUE: $y - y_0 \in S$

CLARO $(y - y_0)' = y' - y_0' = Ay + b - (Ay_0 + b) =$

$= Ay - Ay_0 = A(y - y_0)$.

LUEGO $y - y_0 \in S$; SI LLAMAMOS $x = y - y_0$

SE TIENE QUE $y = y_0 + x$.

HEMOS PROBADO QUE $S' \subseteq \{ y_0 + x : x \in S \}$.

POR OTRO LADO SI TOMAMOS $y_0 + x$ CON $x \in S$ ENTONCES

$(y_0 + x)' = y_0' + x' = Ay_0 + b + Ax =$

$= A(y_0 + x) + b$. LUEGO $y_0 + x \in S'$

HEMOS PROBADO QUE $\{ y_0 + x : x \in S \} \subseteq S'$

CON LO VISTO PODEMOS ASEGURAR QUE $S' = \{ y_0 + x : x \in S \}$.